

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité: Mécanique non linéaire et Chronométrie

par

Gérard GOUJON

— * — * —

**MESURE DES FLUCTUATIONS DE FREQUENCE
DES RESONATEURS A QUARTZ**

— * — * —

soutenue le 24 octobre 1980, devant la Commission d'Examen :

MM. J.UEBERSFELD
J.G.THEOBALD
M.OLIVIER
J.J.GAGNEPAIN
P.KARTASCHOFF

Président
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

4^e Diss. Besançon

THÈSE

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE

L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR
Spécialité Mécanique des Machines et des Structures

par

Gérard GOUDON

Mémoire de 200 pages

MESURE DES FLUCTUATIONS DE FREQUENCE

DES RESONATEURS A QUARTZ

Mémoire de 200 pages

soutenue le 24 octobre 1980, devant la Commission d'Examen :

MM. J. UBERSFELD

J. C. THEOBALD

M. OLIVIER

J. J. GAGNEPAIN

Président

Examinateur

Examinateur

Examinateur

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité: Mécanique non linéaire et Chronométrie

par

Gérard GOUJON

— * — * —

**MESURE DES FLUCTUATIONS DE FREQUENCE
DES RESONATEURS A QUARTZ**

— * — * —

soutenue le 24 octobre 1980, devant la Commission d'Examen :

MM. J.UEBERSFELD
J.G.THEOBALD
M.OLIVIER
J.J.GAGNEPAIN
P.KARTASCHOFF

Président
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE BESANCON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LEVEQUE

Président honoraire : Monsieur le Professeur Jean THIEBAUT

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN : M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

DOYENS HONORAIRES : MM. GLANGEAUD,
JACQUEMAIN, CHATELET, THIEBAUT, BERNARD

ASSESSEURS :

- M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
- M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biologie animale Ecologie

PROFESSEURS HONORAIRES :

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,
UEBERSFELD

PROFESSEURS

MM.

BANTEGNIE Robert : Mathématiques
BENILAN Philippe : Mathématiques
BERNARD Jean : Chimie Physique
BIDAULT Michel : Taxonomie expériment.
BROQUET Paul : Géologie
BRUCKERT Sylvain : Ecologie végétale
BULABOIS Jean : Physique gle optique
CAPODANNO Pierre : Mécanique théorique
CERUTTI Ernest : Chimie appliquée
CHALEAT Raymond : Mécanique appliquée
CHARDON J. Claude : Spectroscopie
CHAUVE Pierre : Géologie minéralogie
COUGNARD Jean : Mathématiques
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
DOBREMEZ J. Franç. : Biologie
DUBOUCHET Jacques : Physiologie végétale
GALATRY Louis : Physique moléculaire
GAUDEMER Yves : Biochimie
GIRARDET Claude : Physique moléculaire
GOMOT Lucien : Zoologie-embryologie
GOUARNE René : Mathématiques
GRAS Georges : Mathématiques
GREMILLARD Jean : Mathématiques
KARCHE J. Paul : Pétrographie Minéral.
LALLEMENT Gérard : Mécanique appliquée
LAUDE Bernard : Chimie organique
LESAINTE Pierre : Mathématiques I
LHOTE François : Automatique
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales

MIELLOU J. Claude : Analyse numérique
MILLET Bernard : Botanique
MONTAGNER Hubert : Phychophysiologie
MOREELS Guy : Astronomie
OLIVIER Marcel : Electronique quantique
OYTANA Claude : Mécanique appliquée
PAGETTI Jacques : Chimie Appliquée
Génie chimique
PARIZET Jean : Mathématiques
PERROT Roger : Chimie générale
PLUVINAGE Philippe : Physique théorique
POTIER Robert : Physique des sols
RANGHEARD Yves : Géologie
REAL Pierre : Ecologie animale
RIPPLINGER Jean : Physiologie animale
ROBERT Daniel : Physique
ROBERT Guy : Electrochimie
ROBERT Jacques : Mathématiques I
THEOBALD J. Gérard : Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean : Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel : Informatique
VERNEAUX Jean : Zoologie-embryologie
VIENOT J. Charles : Physique gle optique
WEIL Michel : Mathématiques

Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE

Je remercie très sincèrement Monsieur le Directeur Général du C.N.R.S. de m'avoir accordé pendant deux ans une bourse d'ingénieur stagiaire de thèse et de m'avoir permis d'effectuer mes recherches au L.P.M.O.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres du Jury qui ont bien voulu examiner ce travail :

Monsieur UEBERSFELD, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, qui me fait l'honneur de présider le Jury.

Monsieur THEOBALD, Professeur à l'Université de Franche-Comté.

Monsieur OLIVIER, Professeur à l'Université de Franche-Comté.

Monsieur GAGNEPAIN, Directeur du Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du CNRS à Besançon, qui m'a proposé ce travail et accueilli dans son laboratoire.

Monsieur KARTASCHOFF, Chef de la Section de la Technique Générale en Radioélectricité, Direction Générale des PTT, Berne (Suisse).

Au laboratoire, j'ai bénéficié de l'aide constante et efficace de Gilles MARIANNEAU et Claude PAULIN, des conseils toujours judicieux de Jacques GROSLAMBERT, du support technique indispensable de Christian BONJOUR, Bernard JUPILLE et Claude MAGNIN pour le montage de l'installation cryogénique. Christiane HISLEUR a assuré avec sa compétence habituelle la dactylographie du manuscrit. Merci à tous.

TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
 <u>PREMIERE PARTIE : ETUDE THEORIQUE</u>	
 I - LE RESONATEUR A QUARTZ : SCHEMA EQUIVALENT	4
 II - INFLUENCE DE LA CHARGE SUR LES PARAMETRES DU RESONATEUR	8
 III - INFLUENCE DES VARIATIONS LENTES DE CERTAINS PARAMETRES	10
1. Modulation de la fréquence propre	11
2. Modulation de la phase du signal d'excitation	18
 IV - CARACTERISATION DE LA PURETE SPECTRALE ET DE LA STABILITE DES RESONATEURS ETUDIES	
1. Introduction et passage domaine fréquence - domaine temps	21
2. Considérations sur $S_y(f)$	23
3. Analyse spectrale : principe et considérations pratiques	26
 <u>DEUXIEME PARTIE : ETUDE EXPERIMENTALE</u>	
 I - MESURE DES PARAMETRES DES RESONATEURS	
1. Introduction	30
2. Mesure à température ambiante	30
3. Mesure aux très basses températures	32
4. Evolution des paramètres entre 4°K et 300°K	36
 II - MESURE DU BRUIT PROPRE DES RESONATEURS	
1. Résonateurs de fréquences identiques : 1ère méthode	
1.1. Introduction	38
1.2. Réalisation du banc	39

1.3. Pratique de la mesure	41
1.4. Interprétation des mesures	44
1.5. Bruit du banc	45
2. Résonateurs de fréquences différentes : 2e méthode	
2.1. Introduction	51
2.2. Principe	51
2.3. Influence du bruit des sources	52
2.4. Banc prototype	53
2.5. Nouveau banc	54
2.6. Pratique de la mesure	60
2.7. Bruit du banc	60
3. Mesure de quartz de qualité médiocre	65
III - RESULTATS	
1. Paramètres des résonateurs	68
2. Bruit des résonateurs	72
<u>CONCLUSION</u>	87
<u>ANNEXE</u> : L'installation cryogénique	89

INTRODUCTION

Le succès de l'oscillateur à quartz dans de nombreuses applications a conduit à une progression constante de ses performances, qui résultent à la fois des améliorations de l'électronique et des caractéristiques du résonateur. Ceci suppose que les différentes sources de bruit, causes d'instabilités, puissent être isolées et qu'en particulier le bruit du résonateur soit séparé de celui de l'électronique d'entretien et d'isolation.

Dans le présent travail sont étudiées les fluctuations de fréquence dues au résonateur.

Les premières mesures du bruit de fréquence propre d'un résonateur à quartz [1], [2], ont montré que d'une part la limitation principale de stabilité à court terme d'un oscillateur à quartz provient de la présence de bruit en $1/f$ (dépendance en $1/f$ de la densité spectrale des fluctuations de fréquence relative, qui se traduit par un palier de la courbe de stabilité dans le domaine temporel) et que d'autre part le niveau de bruit des résonateurs étudiés est étroitement lié à leur coefficient de qualité, les résultats obtenus indiquant une loi de dépendance en $1/Q^4$.

Cependant ce niveau de bruit est également lié à d'autres facteurs qui dépendent de la conception même du résonateur (dessin des électrodes : adhérentes ou non adhérentes, coupe cristalline, fixations). Pour les meilleurs résonateurs, la limitation provient des propriétés de la structure cristalline elle-même. Dans ce cas la mesure des caractéristiques de bruit aux très basses températures apporte de nouvelles informations.

En effet l'immersion dans l'hélium liquide provoque pour la grande majorité des résonateurs une augmentation du coefficient de qualité. Outre l'espoir d'obtenir par cette méthode des niveaux de bruit plus faibles pouvant conduire à la réalisation

d'oscillateurs plus performants, on dispose ainsi pour un même quartz de valeurs distinctes du coefficient de qualité. Les mesures de bruit correspondantes doivent alors permettre de mieux cerner la validité de la loi en $1/Q^4$.

De plus l'analyse de la relaxation des impuretés, toujours aux basses températures, devrait également permettre de montrer si une corrélation existe entre la présence de ces impuretés et le niveau de bruit en $1/f$.

Le présent travail se divise en deux parties.

Une première partie théorique regroupe les différentes notions utilisées. On y trouvera en particulier l'étude du comportement d'un résonateur face aux fluctuations de sa fréquence propre et de la fréquence du signal d'excitation.

La partie expérimentale traite dans un premier temps de la mesure des paramètres des résonateurs, dont la connaissance est nécessaire en particulier pour établir la relation avec le niveau de bruit mesuré. Sont étudiées ensuite les différentes méthodes de mesure des fluctuations de fréquence des résonateurs, mises au point en fonction des conditions expérimentales rencontrées en particulier aux très basses températures.

Les résultats obtenus sont rassemblés et commentés à la fin.

PREMIERE PARTIE
E T U D E T H E O R I Q U E

-o0o-

I - LE RESONATEUR A QUARTZ - SCHEMA EQUIVALENT

La plupart des résonateurs rencontrés au cours de cette étude sont constitués d'une lamelle de quartz sur les faces de laquelle sont déposées des électrodes (fig. 1).

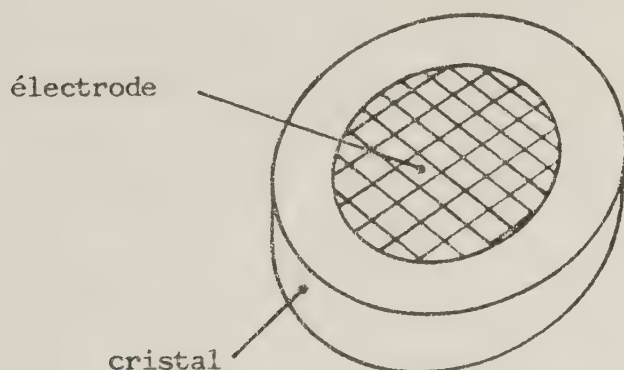


Fig. 1

L'effet piézoélectrique transforme l'excitation électrique transmise par les électrodes en une vibration mécanique du cristal. On adopte habituellement un schéma électrique équivalent constitué d'un circuit $R_1 L_1 C_1$ série dont les éléments dits "motionnels" traduisent les propriétés de la vibration mécanique.

Les deux électrodes constituent un condensateur plan ayant pour diélectrique la lamelle de cristal. La capacité C_0 de ce condensateur vient se placer en parallèle sur le circuit résonnant.

On obtient donc le schéma classique du résonateur à quartz de la figure 2.

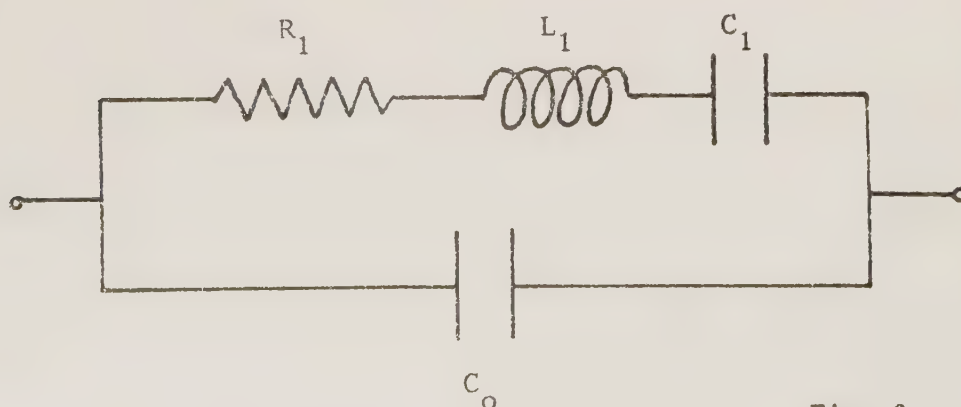


Fig. 2

En notation de Laplace, l'impédance présentée par ce circuit s'écrit :

$$Z_Q(p) = \frac{p^2 + p R_1/L_1 + 1/L_1 C_1}{p C_o [p^2 + p R_1/L_1 + 1/L_1 C_1 + 1/L_1 C_o]} \quad (1)$$

On fait ainsi apparaître les quantités caractéristiques suivantes :

$$\omega_o^2 = 1/L_1 C_1 \quad \text{fréquence angulaire de résonance}$$

$$\omega_p^2 = 1/L_1 C_1 + 1/L_1 C_o \quad \text{fréquence angulaire d'antirésonance}$$

$$Q = L_1 \omega_o / R_1 \quad \text{coefficient de qualité}$$

$Z_Q(p)$ s'écrit alors :

$$Z_Q(p) = \frac{p^2 + \omega_o p/Q + \omega_o^2}{p C_o [p^2 + \omega_o p/Q + \omega_p^2]} \quad (2)$$

Pour une pulsation d'excitation ω et en adoptant la notation $\omega/\omega_o = u$, il vient :

$$Z_Q(j\omega) = \frac{1 - u^2 + j u/Q}{j \omega_o C_o u [u_p^2 - u^2 + j u/Q]} \quad (3)$$

Si l'on dispose ce quartz dans le montage très simple de la figure 3, il vient :

$$\frac{v}{e_g} = \frac{R_2}{R_2 + R_g + Z_Q}$$

Nous nous intéresserons à la phase relative ϕ entre v et e_g , c'est-à-dire au signe près à la phase de la quantité $R_2 + R_g + Z_Q$. Nous noterons $R_2 + R_g = R$.

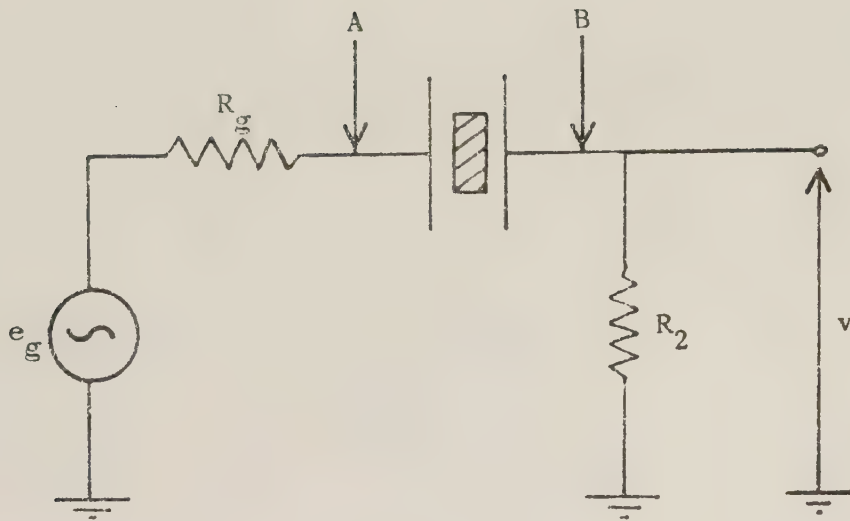


Fig. 3

$$Z_{Q+R} = \frac{[u/Q - j(1-u^2)] [u_p^2 - u^2 - j u/Q]}{C_0 \omega_0 u [u^2/Q^2 + (u_p^2 - u^2)^2]} + R$$

d'où l'on déduit :

$$\phi = \text{Arctg} \frac{u^2/Q^2 + (1-u^2) (u_p^2 - u^2)}{u/Q (u_p^2 - 1) + R C_0 \omega_0 u [u^2/Q^2 + (u_p^2 - u^2)^2]}$$

En fait, on a $1/Q^2 \ll 1$ et l'expression simplifiée suivante :

$$\phi \approx \text{Arctg} \frac{(1-u^2) (u_p^2 - u^2)}{u(u_p^2 - 1)/Q + R C_0 \omega_0 u (u_p^2 - u^2)^2} \quad (4)$$

On trace aisément cette courbe expérimentalement en plaçant un phasemètre aux points A et B du montage de la figure 3.

Cette courbe est reproduite figure 4 où est indiquée l'influence d'une augmentation artificielle de la capacité parallèle.

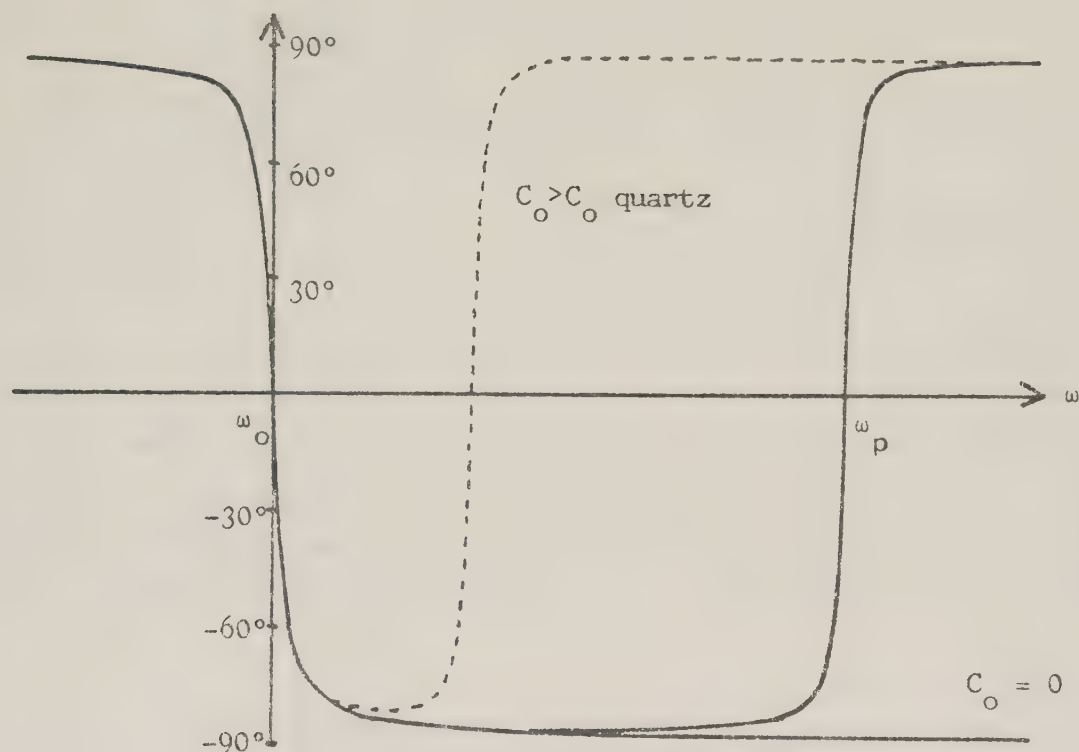


Fig. 4

On voit ainsi comment le résonateur traduit en fluctuations de phase toutes les fluctuations de fréquence de la source, et de même toutes les fluctuations de sa propre fréquence de résonance. Cette propriété est importante car la mesure donne accès aux fluctuations de phase d'un signal donné, et l'interprétation en termes de fluctuation de fréquence devra en tenir compte.

II - INFLUENCE DE LA CHARGE SUR LES PARAMETRES D'UN RESONATEUR

Considérons l'expression de Z_Q en fonction de ces paramètres caractéristiques (ω_o , Q , R_1), en négligeant l'influence de C_o

$$Z_Q = R_1 [1 + jQ (\omega/\omega_o - \omega_o/\omega)] \quad (5)$$

Soit encore en faisant intervenir la demi-bande passante :

$$Z_Q \approx R_1 [1 + j (\omega - \omega_o)/\gamma] \quad (6)$$

Cette expression étant valable pour des valeurs de ω proches de ω_o .

On voit ainsi qu'une résistance placée en série avec le résonateur, s'ajoutant directement à R_1 , agit directement sur le coefficient de qualité en le diminuant. La fréquence de résonance n'est théoriquement pas affectée par une telle charge.

Variation de fréquence :

Considérons le schéma pratique de la figure 5.

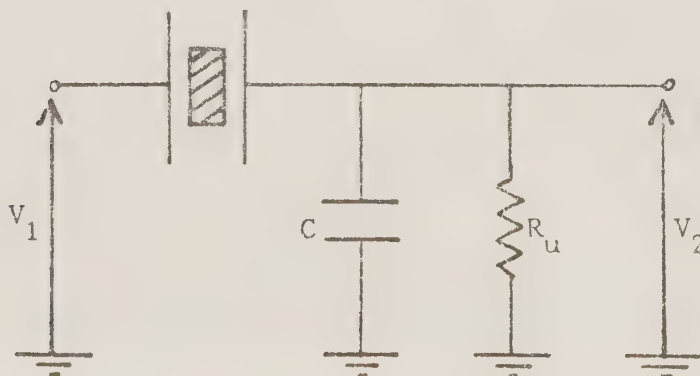


Fig. 5

On a, avec $Z_Q = R_q + jX_q$ et pour une excitation harmonique :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_u}{R_u + (R_q + jX_q)(1 + jR_u C\omega)}$$

Cette quantité présente une résonance ω_r donnée par la relation

$$\text{Im}(V_2/V_1) = 0$$

soit :

$$X_q + R_q R_u C\omega_r = 0$$

$$R_q (\omega_r - \omega_o) / \gamma + R_q R_u C\omega_r = 0$$

d'où :

$$\omega_o - \omega_r = \gamma R_u C\omega_o \quad (7)$$

La capacité C contribue donc à diminuer la fréquence de résonance. On constate ici que l'efficacité de C diminue avec γ , donc avec l'augmentation du coefficient de qualité.

On peut aussi dans le même but, placer une capacité en série avec le résonateur. Cette réactance s'ajoute directement à celle du quartz et l'on trouve alors pour nouvelle résonance :

$$\omega_r - \omega_o = \frac{\gamma}{R_1 C\omega_o} \quad (8)$$

Là aussi, l'efficacité de C diminue avec γ . On préférera utiliser la première méthode qui fait appel à des valeurs faibles de C pour l'ajustement en fréquence, alors que la seconde nécessite de fortes valeurs, et ceci en raison du bruit éventuel ajouté au banc par ces capacités.

III - INFLUENCE DES VARIATIONS LENTES DE CERTAINS PARAMETRES

Nous étudierons le modèle décrit en figure 6, simple et qui a l'avantage de traduire correctement les conditions de charge rencontrées effectivement au cours des différentes mesures de bruit.

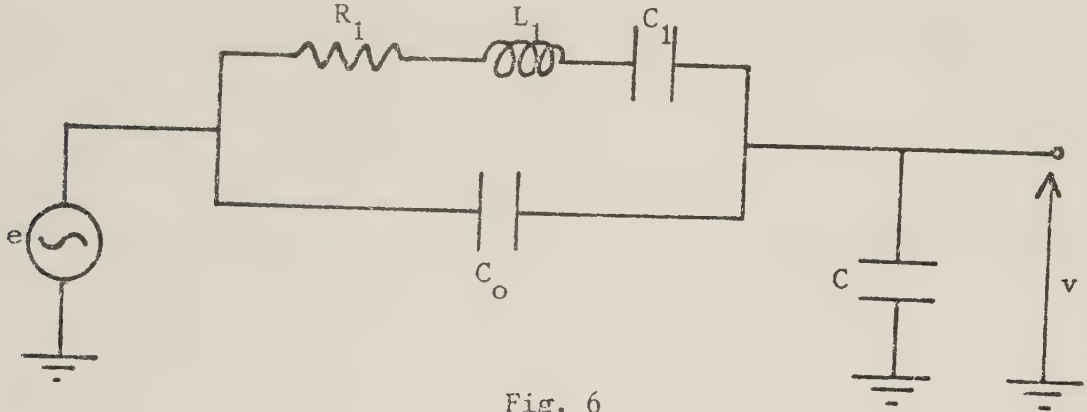


Fig. 6

On a alors :

$$\frac{v}{e} = \frac{1/C_p}{Z_q + 1/C_p} = \frac{1}{1 + Z_q C_p}$$

$$\frac{v}{e} = \frac{1}{1 + \frac{C}{C_0} \frac{p^2 + \omega_0 p/Q + \omega_0^2}{p^2 + \omega_0 p/Q + \omega_p^2}}$$

$$\frac{v}{e} = \frac{p^2 + \omega_0 p/Q + \omega_p^2}{(1+C/C_0)p^2 + (1+C/C_0)\omega_0 p/Q + \omega_p^2 + C/C_0\omega_0^2}$$

Comme $\omega_p^2 = \omega_0^2 (1+C_1/C_0)$, on peut mettre cette relation sous la forme :

$$v [p^2 + \omega_o p/Q + \omega_1^2] = \frac{C_o}{C+C_o} [p^2 + \omega_o p/Q + \omega_p^2] e \quad (9)$$

$$\text{avec } \omega_1^2 = \omega_o^2 (1 + C_1/(C+C_o))$$

En réponse à une excitation harmonique $e = e_o \cos \omega t$, nous noterons $v = V(t) \cos (\omega t + \phi(t))$ le signal de sortie, les quantités $V(t)$ et $\phi(t)$ ayant des variations lentes devant la fréquence d'excitation.

L'expression (9) ci-dessus permet de déduire les quantités V_o et ϕ_o en régime non perturbé ($dV/dt = d\phi/dt = 0$).

$$V_o = \frac{C_o e_o}{C+C_o} \frac{[(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\omega_o^2 \omega^2)/Q^2]^{\frac{1}{2}}}{[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\omega_o^2 \omega^2)/Q^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$\text{tg } \phi_o = \frac{\omega_o \omega}{Q} \frac{\omega_1^2 - \omega_p^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2) + (\omega_o^2 \omega^2)/Q^2} \quad (11)$$

1 - Modulation de la fréquence propre

On pose $\omega_o \rightarrow \omega_o (1 - \epsilon \cos \Omega t)$ $\Omega \ll \omega$

Autre hypothèse : ω_o/Q : bande passante du quartz reste constante en première approximation.

La réécriture de l'équation (9) en notation temporelle fournit

$$v'' + \frac{\omega_o}{Q} v' + \omega_1^2 (1 - 2\epsilon \cos \Omega t) v = \frac{C_o}{C+C_o} [e'' + \frac{\omega_o}{Q} e' + \omega_p^2 (1 - 2\epsilon \cos \Omega t) e] \quad (12)$$

La méthode de résolution adoptée est celle de J. Haag [3].

On effectue le changement de variable :

$$v = V(t) \cos ((\omega t + \phi(t)))$$

Les quantités $V(t)$ et $\phi(t)$ sont lentement variables en fonction du temps.

L'introduction de deux nouvelles variables en remplacement de v provoque une indétermination qui se lève en imposant une relation entre V et ϕ :

$$V' \cos (\omega t + \phi) = V \phi' \sin (\omega t + \phi) \quad (13)$$

Cette relation simplifie l'écriture de $v'(t)$:

$$v'(t) = -\omega V \sin \Psi \quad \text{avec} \quad \Psi = \omega t + \phi$$

d'où :

$$v''(t) = -\omega V' \sin \Psi - \omega V (\omega + \phi') \cos \Psi$$

On en déduit :

$$v'' + \omega_1^2 v = G = -\omega V' \sin \Psi - \omega V \phi' \cos \Psi + (\omega_1^2 - \omega^2) V \cos \Psi$$

et par suite :

$$G \sin \Psi = -\omega V' + (\omega_1^2 - \omega^2) V \cos \Psi \sin \Psi$$

$$G \cos \Psi = -\omega V \phi' + (\omega_1^2 - \omega^2) V \cos^2 \Psi$$

On calcule alors la moyenne sur une période en tenant compte du fait que V et ϕ sont des fonctions lentement variables, ce qui fournit :

$$\overline{G \sin \Psi} = -\omega V'$$

(14)

$$\text{et} \quad \overline{G \cos \Psi} = -\omega V \phi' + \frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega^2) V$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 G \cos \Psi &= \frac{\omega_o \omega}{Q} V \sin \Psi \cos \Psi + 2\omega_1^2 V \varepsilon \cos \Omega t \cos^2 \Psi \\
 &+ \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2} (\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi) - \frac{\omega_o \omega}{2Q} (\sin(2\omega t + \phi) + \sin(-\phi)) \right. \\
 &\left. - \frac{\omega^2}{p} \varepsilon \cos \Omega t (\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi) \right]
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 G \sin \Psi &= \frac{\omega_o \omega}{Q} V \sin^2 \Psi + 2\omega_1^2 \varepsilon V \cos \Omega t \cos \Psi \sin \Psi \\
 &+ \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2} (\sin(2\omega t + \phi) + \sin \phi) + \frac{\omega_o \omega}{2Q} (\cos(2\omega t + \phi) - \cos \phi) \right. \\
 &\left. - \frac{\omega^2}{p} \varepsilon \cos \Omega t (\sin(2\omega t + \phi) + \sin \phi) \right]
 \end{aligned}$$

D'où en utilisant les relations (14) :

$$\begin{aligned}
 V' &= - \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega} \sin \phi - \frac{\omega_o}{2Q} \cos \phi - \frac{\omega^2}{\omega} \varepsilon \cos \Omega t \sin \phi \right] - \frac{\omega_o}{2Q} V \\
 V\phi' &= \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} V - \frac{\omega_1^2}{\omega} \varepsilon V \cos \Omega t \\
 &- \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega} \cos \phi + \frac{\omega_o}{2Q} \sin \phi - \frac{\omega^2}{\omega} \varepsilon \cos \Omega t \cos \phi \right]
 \end{aligned} \tag{15}$$

Pour le régime permanent : $V=V_o$, $\phi = \phi_o$, $\varepsilon=0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_o V_o}{2Q} + \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega} \sin \phi_o - \frac{\omega_o}{2Q} \cos \phi_o \right] &= 0 \\
 \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} V_o - \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\omega} \cos \phi_o + \frac{\omega_o}{2Q} \sin \phi_o \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Dans le cas général, on pose :

$$V = V_0 + \Delta V \quad , \quad \phi = \phi_0 + \Delta \phi$$

d'où $\sin \phi \approx \sin \phi_0 + \Delta \phi \cos \phi_0$ et $\cos \phi \approx \cos \phi_0 - \Delta \phi \sin \phi_0$

et par suite, en tenant compte de (16) et (15) :

$$\begin{aligned} \Delta V' = & - \frac{\omega_0}{2Q} \Delta V + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \varepsilon \cos \Omega t \sin \phi_0 \\ & - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \left[\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \cos \phi_0 + \frac{\omega_0}{2Q} \sin \phi_0 \right] \Delta \phi \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_0 \Delta \phi' = & \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \Delta V - \frac{\omega_0^2}{\omega} \varepsilon V_0 \cos \Omega t + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \varepsilon \cos \Omega t \cos \phi_0 \\ & + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \left[\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \sin \phi_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \cos \phi_0 \right] \Delta \phi \end{aligned}$$

$\Delta V(t)$ et $\Delta \phi(t)$ sont les parties fluctuantes de $V(t)$ et $\phi(t)$, donc conséquences directes de la perturbation de pulsation Ω . Leur forme la plus générale est :

$$\Delta \phi = \Phi \cos (\Omega t + \alpha)$$

$$\Delta V = A \cos (\Omega t + \beta)$$

On notera encore :

$$\lambda = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \cos \phi_0 + \frac{\omega_0}{2Q} \sin \phi_0$$

$$\mu = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \sin \phi_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \cos \phi_0$$

Ce qui permet de réécrire les équations (17) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta V' &= -\frac{\omega_0}{2Q} A \cos \Omega t \cos \beta + \frac{\omega_0}{2Q} A \sin \Omega t \sin \beta + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \epsilon \cos \Omega t \sin \phi_0 \\
&\quad - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \lambda \Phi \cos \Omega t \cos \alpha + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \lambda \Phi \sin \Omega t \sin \alpha \\
&= -A \Omega \cos \beta \sin \Omega t - A \Omega \sin \beta \cos \Omega t
\end{aligned}$$

D'où par identification :

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega_0}{2Q} A \cos \beta + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \epsilon \sin \phi_0 - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \lambda \Phi \cos \alpha &= -A \Omega \sin \beta \\
\frac{\omega_0}{2Q} A \sin \beta + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \lambda \Phi \sin \alpha &= -A \Omega \cos \beta
\end{aligned} \tag{18}$$

De même :

$$\begin{aligned}
V_0 \Delta \phi' &= \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} A \cos \Omega t \cos \beta - \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} A \sin \Omega t \sin \beta - \frac{\omega_1^2}{\omega} \epsilon V_0 \cos \Omega \\
&\quad + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \mu \Phi \cos \Omega t \cos \alpha - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \mu \Phi \sin \Omega t \sin \alpha \\
&\quad + \epsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \cos \phi_0 \cos \Omega t \\
&= -V_0 \Phi \Omega \sin \Omega t \cos \alpha - V_0 \Phi \Omega \cos \Omega t \sin \alpha
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
-V_0 \Phi \Omega \cos \alpha &= -\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} A \sin \beta - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \mu \Phi \sin \alpha \\
-V_0 \Phi \Omega \sin \alpha &= \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} A \cos \beta - \frac{\omega_1^2}{\omega} \epsilon V_0 \\
&\quad + \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \mu \Phi \cos \alpha + \epsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega} \cos \phi_0
\end{aligned} \tag{19}$$

L'expression de V_0 (10) montre que la nouvelle résonance est $\omega = \omega_1$. Nous adopterons donc cette fréquence comme fréquence d'excitation.

Remarquons d'autre part que ω_1 est assez proche de ω_0 et loin de ω_p puisque C est en pratique nettement plus grand que C_0 .

On obtient alors d'après (16) et (19) :

$$-V_0 \Phi \Omega \cos \alpha = - \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \mu \Phi \sin \alpha = \frac{\omega_0 V_0}{2Q} \Phi \sin \alpha$$

d'où :

$$\frac{\omega_0}{2Q} \sin \alpha = -\Omega \cos \alpha, \quad \text{relation permettant d'exprimer } \alpha \text{ en fonction de } \Omega.$$

Et de même :

$$\begin{aligned} V_0 \frac{\omega_0}{2Q} \Phi \cos \alpha - V_0 \Phi \Omega \sin \alpha &= \varepsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2}{\omega_1} \cos \phi_0 - \varepsilon \omega_1 V_0 \\ &= \varepsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \left[\frac{\omega p}{\omega_1} \cos \phi_0 + 2\omega_1 \frac{Q}{\omega_0} \mu \right] \\ &= \varepsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \left[\cos \phi_0 \left(\frac{\omega^2}{\omega_1} - \omega_1 \right) + 2\omega_1 \frac{Q}{\omega_0} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{2\omega_1} \sin \phi_0 \right] \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\varepsilon \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \left[\cos \phi_0 + \frac{\omega_1 Q}{\omega_0} \sin \phi_0 \right]}{- \frac{2Q}{\omega_0} \frac{C_0 e_0}{C+C_0} \left[\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{2\omega} \sin \phi_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \cos \phi_0 \right] \left[\frac{\omega_0}{2Q} \cos \alpha - \Omega \sin \alpha \right]} \end{aligned}$$

Cette expression se transforme en :

$$\begin{aligned} \Phi &= - \frac{\varepsilon \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \left[1 + \omega_1 \frac{Q}{\omega_0} \operatorname{tg} \phi_0 \right]}{\left[\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{2\omega_1} \operatorname{tg} \phi_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \right] \left[1 + \frac{4Q^2 \Omega^2}{\omega_0^2} \right] \cos \alpha} \end{aligned}$$

Puis enfin sous la forme suivante :

$$\Phi = \epsilon \frac{2\omega_0}{Q} \frac{\omega_1}{(\omega_p^2 - \omega_1^2)} \frac{1}{[1 + \frac{4Q^2\Omega^2}{\omega_0^2}]^{\frac{1}{2}}} \frac{1 - \frac{Q^2}{\omega_0^2} (\omega_p^2 - \omega_1^2)}{1 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} (\frac{1}{\omega_p^2 - \omega_1^2})^2}$$

Quelques ordres de grandeur pratiques vont nous permettre de simplifier cette expression.

$\frac{\omega_0}{Q}$ = bande passante du résonateur : quelques hertz en pratique.

$\omega_p - \omega_1 \approx \omega_p - \omega_0$ pour $C \gg C_0$. Cette quantité est de l'ordre de quelques centaines de hertz (variable d'un résonateur à l'autre).

Il vient alors :

$$\Phi \approx - \frac{1}{[\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}]^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

Dans la bande passante du quartz, donc pour $\Omega < \omega_0/2Q$, on obtient la relation suivante :

$$\Phi \approx - 2Q \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \quad (21)$$

compte tenu du fait que $\epsilon\omega_1$ représente la valeur absolue de la fluctuation de fréquence propre $\Delta\omega_0$.

2 - Modulation de phase du signal d'excitation par un bruit

Le signal d'excitation prend la forme :

$$e = e_o \cos [\omega t + \Delta\phi_s(t)] \quad , \quad \left| \Delta\phi_s(t) \right| \text{ petit}$$

Le principe de résolution reste le même (méthode de Haag).

La tension $v(t)$ est à nouveau mise sous la forme :

$$v = V(t) \cos (\omega t + \phi(t))$$

Le calcul se mène de la même façon que précédemment et l'on retombe sur les relations (15) en remplaçant ϕ par $\phi - \Delta\phi_s$ (écart de phase entre signal de sortie et excitation) et en faisant $\varepsilon = 0$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} V' &= - \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega} \sin(\phi - \Delta\phi_s) - \frac{\omega_o}{2Q} \cos(\phi - \Delta\phi_s) \right] - \frac{\omega_o}{2Q} V \\ V\phi' &= - \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega} \cos(\phi - \Delta\phi_s) + \frac{\omega_o}{2Q} \sin(\phi - \Delta\phi_s) \right] + \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} V \end{aligned} \quad (22)$$

On pose $\phi = \phi_o + \Delta\phi$ et $V = V_o + \Delta V$ comme dans le précédent calcul. La quantité $\Delta\phi - \Delta\phi_s$ reste petite.

$$\cos(\phi - \Delta\phi_s) = \cos\phi_o - (\Delta\phi - \Delta\phi_s) \sin\phi_o$$

$$\sin(\phi - \Delta\phi_s) = \sin\phi_o + (\Delta\phi - \Delta\phi_s) \cos\phi_o$$

ce qui conduit à des relations analogues aux relations (17) :

$$\begin{aligned} \Delta V' &= - \frac{\omega_o}{2Q} V - \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega} \cos\phi_o + \frac{\omega_o}{2Q} \sin\phi_o \right] (\Delta\phi - \Delta\phi_s) \\ V_o \Delta\phi' &= \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\omega} \Delta V + \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{2\omega} \sin\phi_o - \frac{\omega_o}{2Q} \cos\phi_o \right] (\Delta\phi - \Delta\phi_s) \end{aligned} \quad (23)$$

On pose :

$$\Delta\phi_S = \varepsilon \cos\Omega t$$

et

$$\Delta\phi = \Phi \cos(\Omega t + \alpha)$$

$$\Delta V = A \cos(\Omega t + \beta)$$

On se place à nouveau à la fréquence d'excitation $\omega = \omega_1$ (résonance d'amplitude). Des relations (16) on déduit :

$$V_o = - \frac{2Q}{\omega_o} \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{p}{2\omega_1} \sin\phi_o - \frac{\omega_o}{2Q} \cos\phi_o \right]$$

et des relations (22) :

$$- \frac{2Q}{\omega_o} \frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{p}{2\omega_1} \sin\phi_o - \frac{\omega_o}{2Q} \cos\phi_o \right] \Delta\phi' =$$

$$\frac{C_o e_o}{C+C_o} \left[\frac{p}{2\omega_1} \sin\phi_o - \frac{\omega_o}{2Q} \cos\phi_o \right] (\Delta\phi - \Delta\phi_S)$$

$$\text{d'où} - \frac{2Q}{\omega_o} \Delta\phi' = \Delta\phi - \Delta\phi_S$$

soit d'après la forme choisie pour $\Delta\phi$:

$$- \Phi \Omega \sin(\Omega t + \alpha) = - \frac{\omega_o}{2Q} [\Phi \cos(\Omega t + \alpha) - \varepsilon \cos\Omega t]$$

$$- \Phi \Omega \sin\Omega t \cos\alpha - \Phi \Omega \cos\Omega t \sin\alpha =$$

$$\frac{\omega_o}{2Q} \varepsilon \cos\Omega t - \frac{\omega_o}{2Q} \Phi \cos\Omega t \cos\alpha + \frac{\omega_o}{2Q} \Phi \sin\Omega t \sin\alpha$$

d'où l'on déduit les deux relations :

$$- \Phi \Omega \cos\alpha = \frac{\omega_o}{2Q} \Phi \sin\alpha$$

$$- \Phi \Omega \sin\alpha = \frac{\omega_o}{2Q} \Phi - \frac{\omega_o}{2Q} \Phi \cos\alpha$$

Il vient :

$$\text{tg}\alpha = - 2Q \frac{\Omega}{\omega_o}$$

et :

$$\Phi \left[\frac{\omega_o}{2Q} \cos\alpha - \Omega \sin\alpha \right] = \varepsilon \frac{\omega_o}{2Q}$$

d'où :

$$\Phi = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{\epsilon}{\left[\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (24)$$

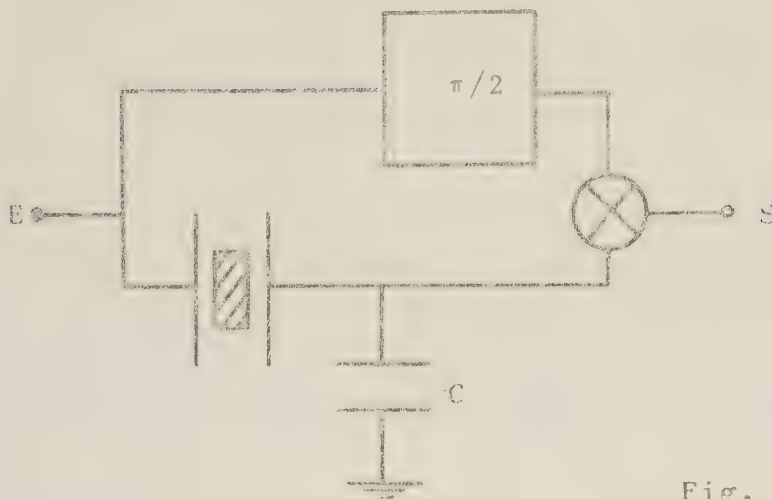


Fig. 7

Envisageons dans ces conditions le montage de la figure 7. Les fluctuations de phase mesurées par le mélangeur (dont les deux entrées sont maintenues en quadrature), sont représentées avec les notations adoptées par $\Delta\phi - \Delta\phi_s$, que l'on notera ϕ_s .

$$\phi_s = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{\epsilon}{\left[\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \cos \left(\Omega t - \arctg 2Q \frac{\Omega}{\omega_0} \right) - \epsilon \cos \Omega t$$

Cette expression complexe se simplifie dans le cas où Ω est située à l'intérieur de la bande passante du quartz, de sorte que l'on peut faire l'approximation :

$$\frac{2Q}{\omega_0} \Omega \ll 1$$

Il vient alors :

$$\phi_s \approx \epsilon \cos \left(\Omega t - \frac{2Q\Omega}{\omega_0} \right) - \epsilon \cos \Omega t$$

soit :

$$\phi_s \approx \varepsilon \times \frac{2Q}{\omega_o} \sin \Omega t = - \frac{2Q}{\omega_o} \frac{d(\Delta \phi_s)}{dt} \quad (25)$$

Nous obtenons ainsi une évaluation du bruit de phase (ou de fréquence) apporté par la source en sortie du montage étudié.

Cette expression est à comparer avec la relation (21). En effet $1/\omega_o \, d(\Delta \phi_s)/dt$ représente la variation de fréquence relative de la source, quantité qui intervient aussi dans (21) sous la forme $\Delta \omega_o / \omega_o$. On remarque donc que les deux types de perturbation étudiés ont sur le résonateur des effets similaires.

IV - CARACTERISATION DE LA PURETE SPECTRALE ET DE LA STABILITE DES RESONATEURS ETUDIES

1 - Introduction et passage domaine fréquence - domaine temps

Un résonateur donné est caractérisé par les fluctuations de sa fréquence propre autour de la valeur moyenne ω_o .

La fréquence instantanée de résonance sera donc notée :

$$\omega(t) = \omega_o + \Delta \omega(t) \quad \text{avec} \quad \left| \Delta \omega(t) \right| \ll \omega_o$$

$\Delta \omega(t)$ représentant un terme de bruit dont l'analyse fait l'objet de cette étude.

Afin de comparer des résonateurs ayant des fréquences de résonance différentes, on normalise la variable étudiée par rapport à la fréquence de résonance nominale. On pose ainsi :

$$y(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_0} \quad (26)$$

On dispose alors conventionnellement de deux moyens de caractériser la stabilité de fréquence :

- dans le domaine temps par la variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau)$
- dans le domaine fréquence par la densité spectrale de puissance des fluctuations de la variable $y(t)$: $S_y(f)$.

Toutes les méthodes de mesure qui seront utilisées dans la suite ont pour principe de convertir en une tension de bruit les fluctuations de fréquence de résonance des quartz. Cette tension se prête particulièrement bien à une analyse spectrale, alors que l'analyse temporelle nécessiterait une conversion tension fréquence pour être mise en oeuvre.

On choisira donc en pratique l'analyse spectrale, qui a de plus l'avantage de fournir rapidement une visualisation d'ensemble des propriétés de l'échantillon mesuré.

Il faut noter par ailleurs que des formules existent permettant d'évaluer $\sigma_y^2(\tau)$ à partir de $S_y(f)$ [4].

Bruit blanc de fréquence :

$$S_y(f) = h_0 \quad \sigma_y^2(\tau) = h_0 \tau^{-1} / 2$$

Bruit flicker de fréquence :

$$S_y(f) = h_{-1}/f \quad \sigma_y^2(\tau) = h_{-1} \cdot 2 \cdot \text{Log} 2$$

Marche aléatoire de fréquence :

$$S_y(f) = h_{-2}/f^2 \quad \sigma_y^2(\tau) = h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{6}$$

2 - Considérations sur $S_y(f)$

Mathématiquement, la densité spectrale de puissance des fluctuations d'une variable $y(t)$ est définie comme la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation (théorème de Wiener-Kintchine).

Autocorrélation :

$$R_y(\tau) = \overline{y(t+\tau/2) y(t-\tau/2)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t+\tau/2) y(t-\tau/2) dt \quad (27)$$

Pour les fonctions réelles, l'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

$$R_y(\tau) = R_y(-\tau)$$

$$R_y(\tau) \leq R_y(0)$$

$$R_y(0) = \overline{y^2}$$

Par suite :

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) \cdot e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

$$\text{et } S_y(f) = S_y(-f)$$

$$S_y(f) \text{ réel } \geq 0$$

On a enfin :

$$R_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df = \overline{y^2}$$

Physiquement, la densité spectrale de puissance doit être définie pour des fréquences positives ou nulles. Comme la définition mathématique fournit une fonction paire, on définit simplement la quantité physique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
S_y(f)_{\text{physique}} &= 2 [S_y(f)_{\text{mathématique}}] & f > 0 \\
S_y(f)_{\text{physique}} &= 0 & f < 0
\end{aligned}
\tag{28}$$

On obtient ainsi le même bilan énergétique puisque :

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)_{\text{math.}} df = \int_0^{\infty} S_y(f)_{\text{phys.}} df$$

On peut déduire des propriétés énumérées ci-dessus la relation simplifiée :

$$S_y(f)_{\text{phys.}} = 4 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \tag{29}$$

D'où il ressort que $S_y(f)_{\text{phys.}}$ s'exprime en secondes.

Dans la suite, on ne considérera plus sous la désignation $S_y(f)$ que la quantité physique. Il en sera de même pour les autres quantités du même type qui pourront intervenir, comme $S_v(f)$ ou $S_\phi(f)$, etc...

Des définitions adoptées se déduit immédiatement l'interprétation de la formule (20) en termes de densités spectrales de puissance.

$$S_\phi(f) = \frac{S_y(f) \times \frac{f_1^2}{f^2 + \frac{f_0^2}{4Q^2}}}{\frac{\omega_1^2}{4\pi^2 f^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}} \tag{30}$$

L'interprétation de l'expression (25) fournit de même :

$$S_{\phi_S}(f) = (4Q^2/\omega_0^2)\Omega^2 S_{\phi_S}(f) = (4Q^2/\omega_0^2)S_{\phi_S}^*(f) \tag{31}$$

$S_{\phi}^{\bullet}(f)$ représente donc la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence de la source. La normalisation par rapport à la fréquence de travail (ω_1) de la source fournit :

$$S_{y_s}(f) = (1/\omega_1^2) S_{\phi_s}^{\bullet}(f)$$

d'où en reportant dans (31) :

$$S_{\phi_s}(f) = (4Q^2\omega_1^2/\omega_o^2) S_{y_s}(f) \quad (32)$$

Dans le cas où la fréquence de Fourier f est choisie dans la bande passante du quartz (c'est l'hypothèse faite pour l'obtention de (32)), la formule (30) donne de même :

$$S_{\phi}(f) = (4Q^2\omega_1^2/\omega_o^2) S_y(f) \quad (33)$$

Les expressions (32) et (33) traduisent, dans le cas du montage de la figure 7, les contributions respectives au bruit de phase mesuré du bruit de fréquence de la source et du quartz.

On voit ainsi que pour mesurer par ce montage direct le bruit du quartz, il faut et il suffit que celui-ci soit nettement plus grand que le bruit de la source.

Nous verrons comment la mise en service de synthétiseurs hautement performants permet d'envisager une réalisation pratique de ce montage de principe.

3 - Analyse spectrale : Principe et considérations pratiques

Une tension de bruit $v(t)$ est appliquée à l'entrée de l'analyseur. Sur une durée θ entre les instants $k\theta$ et $(k+1)\theta$ l'appareil prélève, sous forme échantillonnée, une tranche de signal notée $v_k(t, \theta)$.

$$v_k(t, \theta) = v(t) \quad \text{pour} \quad k\theta < t < (k+1)\theta$$

$$v_k(t, \theta) = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq k\theta \quad \text{et} \quad t \geq (k+1)\theta$$

La transformée de Fourier de cette quantité s'écrit :

$$\text{T.F. } [v_k(t, \theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v_k(t, \theta) e^{-2\pi jft} dt = \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} v(t) e^{-2\pi jft} dt$$

Cette transformée de Fourier peut être calculée par algorithme FFT (Fast Fourier Transform) à partir des échantillons prélevés.

La puissance moyenne du signal $v_k(t, \theta)$ s'exprime d'une part en fonction de sa transformée de Fourier par le théorème de Parseval et d'autre part en fonction de la densité spectrale de puissance, ce qui conduit à l'égalité :

$$\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{T.F. } [v_k(t, \theta)]|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{v_k \text{ math}}(f, \theta) df$$

d'où :

$$S_{v_k \text{ math}}(f, \theta) = \frac{|\text{T.F. } [v_k(t, \theta)]|^2}{\theta}$$

Soit pour la quantité physique :

$$S_{v_k}(f, \theta) = 2 \frac{|\text{T.F. } [v_k(t, \theta)]|^2}{\theta} \quad f \geq 0 \quad (34)$$

Cette valeur est calculable facilement à partir de la connaissance de la transformée de Fourier.

Le calculateur peut traiter ainsi successivement un nombre n de tranches de signal sur une durée $n\theta$. Il fournit alors une moyenne des valeurs calculées :

$$S_v(f, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{v_k}(f, \theta) \quad f \geq 0 \quad (35)$$

En fait, l'analyseur de spectres dont nous disposons affiche la racine carrée de cette quantité en volts efficaces/ $\sqrt{\text{Hz}}$. Il convient donc d'interpréter tous les spectres reproduits dans ce mémoire en fonction de cette caractéristique. En particulier le palier flicker de la densité spectrale de puissance (bruit en $1/f$) se traduit par une pente $\frac{1}{2}$ (10 dB/décade) sur le spectre fourni par l'analyseur.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE

-oOo-

1 - Introduction

La connaissance des paramètres, principalement de la fréquence de résonance et du coefficient de qualité, nous est indispensable pour classer les différents résonateurs en vue des mesures de leur bruit propre et de la mise en évidence d'une corrélation entre le niveau de bruit et le coefficient de qualité.

2 - Mesure à la température ambiante

La méthode utilisée, simple et convenable pour le degré de précision voulu, est illustrée figure 1 [9].

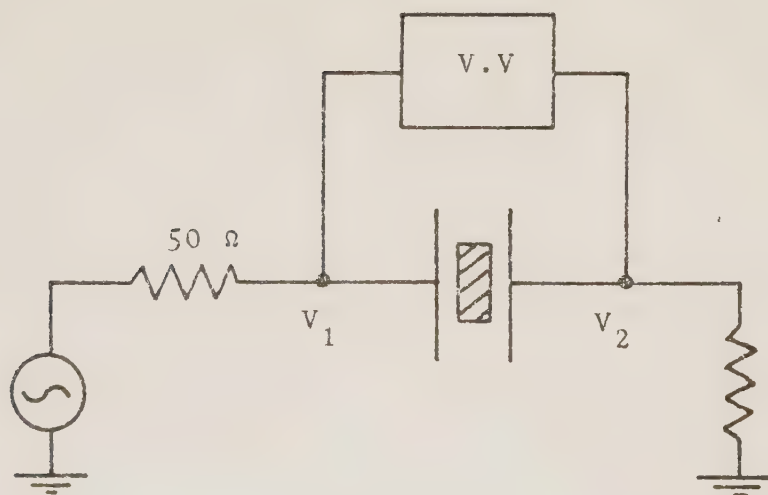


Fig. 1

On adopte comme valeur de la fréquence de résonance la valeur f_0 (lue sur le synthétiseur), pour laquelle le déphasage entre les deux voies du voltmètre vectoriel est nul.

Les valeurs V_1 et V_2 mesurées dans ces conditions donnent accès à la résistance motiionnelle R_1 :

$$R_1 = R \times \frac{V_1 - V_2}{V_2}$$

On positionne ensuite le synthétiseur sur les fréquences quadrantales f_1 et f_2 pour lesquelles la différence de phase entre les deux voies du voltmètre vectoriel est $\pm 45^\circ$ (soit une atténuation de -3 dB en courant).

Le coefficient de qualité en charge s'en déduit :

$$Q_c = \frac{f_0}{f_1 - f_2}$$

D'où la valeur à vide :

$$Q_0 = \frac{f_0}{f_1 - f_2} \frac{R_1 + R}{R_1}$$

Notons que R doit être de l'ordre de R_1 ou plus faible pour que la résonance en charge soit bien visible.

Les paramètres L_1 et C_1 peuvent se déduire des formules suivantes :

$$L_1 = \frac{Q_0 R_1}{2\pi f_0} \qquad C_1 = \frac{1}{2\pi Q R_1 f_0}$$

On peut mesurer également la fréquence d'antirésonance f_p correspondant à un nouveau passage à zéro de l'écart de phase entre les 2 voies du voltmètre vectoriel conjugué à un minimum pour la tension V_2 .

Le sens du passage à zéro en fonction de la variation de fréquence suffit d'ailleurs à identifier cette antirésonance (cf. 1ère partie).

Cette résonance est celle du circuit composé des éléments R_1 , L_1 , C_1 en parallèle sur C_0 . On a donc :

$$f_p = \frac{1}{2\pi [L_1 C_1 C_0 / (C_1 + C_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

d'où l'on peut déduire la valeur de C_0 .

3 - Mesure aux basses températures

Problème :

Les valeurs attendues pour les résistances motionnelles des quartz étudiés à la température de l'hélium liquide et en-dessous sont faibles (de l'ordre de 1Ω), voire très faibles ($10^{-1}\Omega$ ou moins).

De plus, la nécessité de plonger le quartz dans le bain d'hélium impose la présence de câbles longs ($\approx 1\text{ m}$) reliant l'échantillon testé au système de mesure, et qui peuvent perturber le comportement du résonateur.

Réalisation :

Ces considérations ont conduit à mettre le quartz dans un montage en π du type suivant :

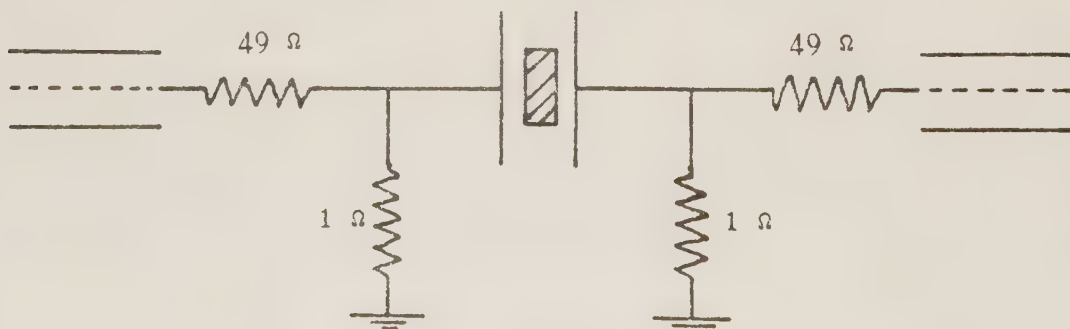


Fig. 2

* le quartz est faiblement chargé, ce qui doit permettre d'observer la résonance avec précision.

* la faible charge du quartz réduit l'influence éventuelle des câbles.

Ce montage en π résistif tient facilement dans une enceinte métallique de dimensions très réduites. Elle se loge très bien avec le quartz à l'extrémité d'une canne contenant les câbles et plongeant dans l'hélium (fig. 3).

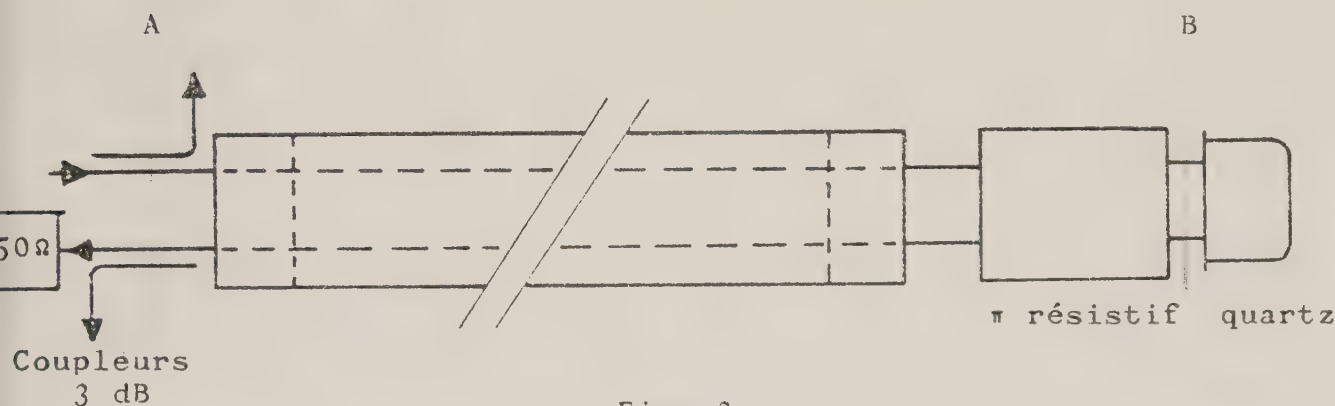


Fig. 3

Les paramètres que l'on cherchera à mesurer sont :

- le coefficient de qualité
- la fréquence de résonance
- la résistance série R_1 qui donne accès à tous les autres éléments de l'impédance motionnelle.

Ces paramètres sont ceux qui varient effectivement avec la température.

- la fréquence de résonance s'obtiendra par la recherche d'un maximum de signal dans la voie de retour.

- le coefficient de qualité s'obtiendra par la recherche des fréquences quadrantales à -3 dB. L'enregistrement de la courbe de réponse autour de la fréquence de résonance par un balayage très lent peut être envisagé.

- la mesure de R_1 est plus délicate.

La puissance d'excitation du quartz doit être très faible en raison des phénomènes "d'hystérésis" observés (1 μ W ou moins en général).

Il faut d'autre part impérativement alimenter et charger le dispositif de la figure 3 par des impédances de 50 Ω . Pour cela on utilise une source d'impédance 50 Ω et une charge étalon en sortie, les tensions dans le plan A étant prélevées par l'intermédiaire de coupleurs.

En raison des faibles puissances d'excitation requises et des atténuations importantes du signal, le niveau recueilli en sortie est très faible (< 50 μ V) et exige d'être amplifié pour être mesuré par le voltmètre vectoriel.

La complexité du montage rend impossible une détermination précise, à partir des quantités mesurées, des tensions présentes dans le plan B aux bornes du quartz.

Comme celui-ci présente à la résonance une impédance uniquement résistive, on s'est orienté vers une méthode d'étalonnage de toute la chaîne de mesure par des résistances connues.

Ces résistances de précision sont d'abord contrôlées au pont de Wheatstone en courant continu, à température ambiante puis dans l'hélium liquide de façon à s'assurer que leurs valeurs ne changent pas ou peu.

On place ensuite ces résistances à la place du quartz dans la chaîne puis on les plonge dans le bain d'hélium. Pour chacune des valeurs choisies et pour une même valeur de la tension d'excitation mesurée en A, on note la tension recueillie par l'intermédiaire du coupleur de sortie et amplifiée. On trace alors la courbe d'étalonnage de cette tension en fonction de la résistance, d'où l'on peut déduire ensuite pour chaque quartz le paramètre R_1 .

Remarque :

La grande différence existant en pratique entre la valeur de la résistance motionnelle R_1 à température ambiante et dans l'hélium, fait que le même montage en π ne peut pas servir pour suivre l'évolution de la fréquence de résonance sur toute cette gamme de températures. En effet, lorsqu'un quartz ayant une résistance R_1 de 50 Ω ou plus est placé dans un π ayant des résistances de 1 Ω en parallèle, l'atténuation provoquée devient trop importante.

Pour une mesure ponctuelle à 4°K, on doit donc opérer de la façon suivante

- le quartz étant monté seul ou dans un montage en π provoquant une atténuation acceptable, on suit la valeur de sa fréquence de résonance jusqu'à 4°K.

- on replace ensuite le quartz dans le π approprié à la mesure des paramètres.

Résultats

Toutes les valeurs mesurées sont regroupées dans un tableau reproduit au § III.1.

L'installation cryogénique nous permettant de descendre en température jusqu'à 1°K, les valeurs pour cette température de certains quartz très performants ont été mesurées.

Remarque :

Si des coefficients de qualité encore plus élevés doivent être mesurés ($Q \approx 10^9$), une autre méthode a été étudiée par SMAGIN [5]. On excite dans un premier temps le quartz puis l'on mesure le temps t que met l'amplitude des oscillations libres pour passer d'une valeur A_1 à A_2 . Le coefficient Q s'en déduit :

$$Q = \frac{\pi f t}{\text{Log } A_1/A_2}$$

4 - Evolution des paramètres entre 4°K et 300°K

Disposant d'une gamme de températures aussi étendues et d'une méthode de mesure rapide qui peut fournir des résultats sur des paramètres variant suffisamment lentement, il est intéressant d'observer leur évolution sur cette gamme, par exemple au cours d'un réchauffement.

- Paramètre f_0

On observe en général une décroissance régulière de la fréquence f_0 avec la température, jusqu'à une température d'environ 10°K à partir de laquelle cette fréquence ne bouge pratiquement plus. Par exemple, entre 4°K et 1,3°K, on n'observe en général pas plus qu'une légère baisse de 10^{-1} Hz.

- Paramètres R_1 et Q

Ces deux paramètres sont liés, une augmentation de R_1 s'accompagnant d'une diminution de Q et inversement.

L'inverse du coefficient de qualité est caractéristique des pertes du résonateur. Si l'on considère son évolution en fonction de la température, tous les quartz présentent un pic dans la

zone de 20°K. Ce pic est dû à l'interaction phonon-phonon. Pour des températures inférieures, les pertes diminuent suivant une loi en T^4 . Pour des températures approchant la température ambiante, on observe une loi à variation proportionnelle à T ou indépendante de T . Pour certains cristaux, la présence d'impuretés alcalines et principalement d'ions Na^+ se traduit par l'apparition d'un pic important au voisinage de 10°K.

Ce passage systématique par un minimum du coefficient de qualité au voisinage de 20°K est intéressant dans la mesure où il constitue un point caractéristique pour les mesures de bruit. On pourrait en effet ainsi connaître pour un même quartz le bruit propre dans deux cas extrêmes (Q minimal et Q maximal) et un cas intermédiaire (température ambiante), ce qui permettrait de mieux apprécier les relations éventuelles existant entre le coefficient de qualité et le niveau du bruit de fréquence.

Le problème de la mesure dans ce cas particulier sera étudié dans le § 11.3.

II - MESURE DU BRUIT PROPRE DES RESONATEURS

1 - Résonateurs de fréquences identiques : 1ère méthode

1.1 - Introduction

Une méthode générale de mesure du bruit de phase de sources de haute qualité a été donnée par D.G. MEYER [6]. L'application aux résonateurs à quartz, commencée par F.L. WALLS [1] et poursuivie par J.J. GAGNEPAIN [2], utilise le schéma de principe de la figure 4.

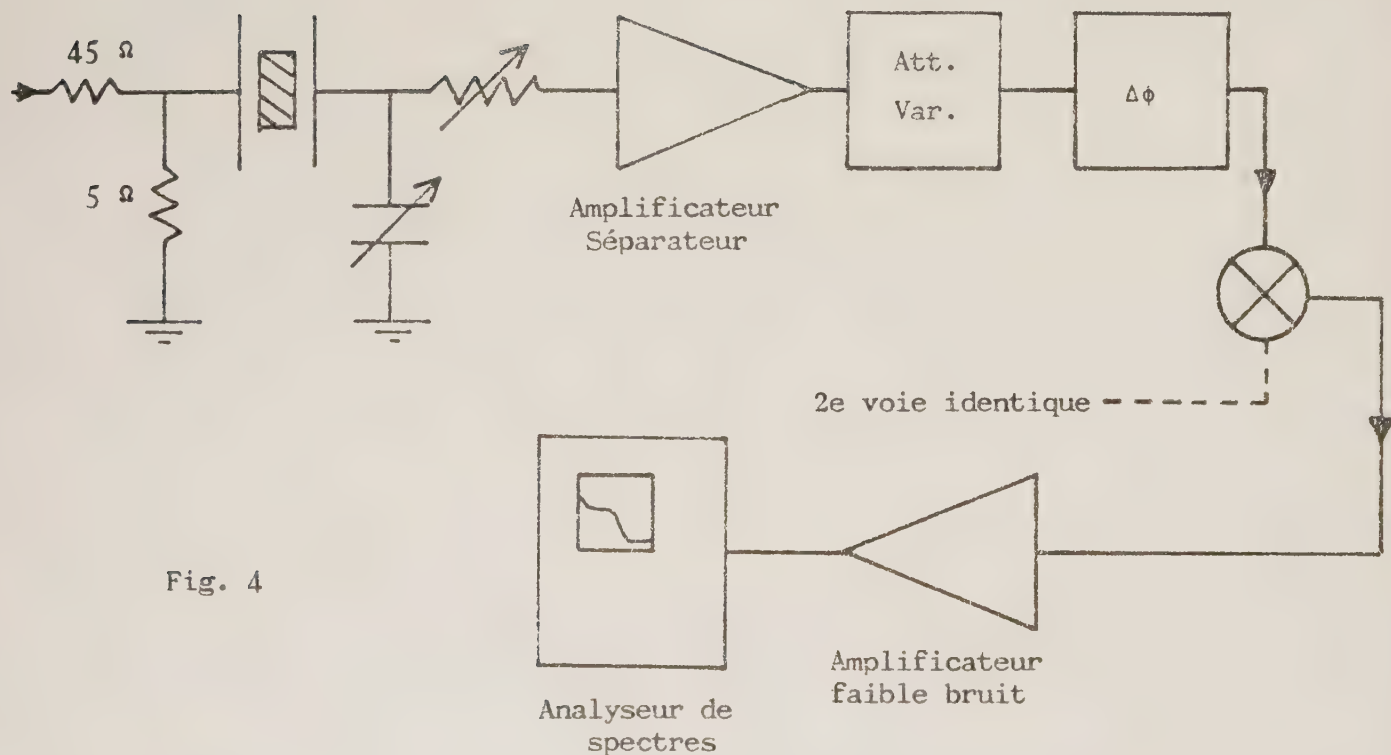


Fig. 4

Les deux signaux de même fréquence présents aux entrées du mélangeur équilibré sont amenés en quadrature par l'intermédiaire des déphaseurs réglables. Dans ces conditions, le mélangeur opère une détection de phase qui transforme en tension le bruit de phase porté par chacun des signaux. Ce bruit comporte principalement une contribution due à la source et une autre due au quartz, le bruit résiduel du banc étant théoriquement négligeable.

En ajustant avec précision la fréquence de résonance des quartz et en équilibrant leurs coefficients de qualité (donc leur réponse fréquence-phase), on peut rendre négligeable par compensation les fluctuations d'amplitude et de fréquence dues à la source, choisie toujours très stable. Les capacités et résistances variables placées en aval des quartz permettent d'effectuer ces réglages.

Les amplificateurs séparateurs assurent l'isolation des deux voies imparfaitement assurée par le mélangeur. Ils permettent en outre par leur gain (de l'ordre de 3) de diminuer un peu la puissance d'excitation des quartz tout en travaillant à un niveau suffisant sur les entrées du mélangeur.

Le signal de sortie est ensuite soumis à une amplification très faible bruit l'amenant à un niveau permettant son analyse spectrale.

1.2 - Réalisation du banc

Le banc complet a été intégré dans un boîtier métallique cloisonné rendant pratique son utilisation avec l'installation cryogénique. Les quartz sont à l'extérieur, soit dans le cryostat, soit dans une enceinte thermostatée à température ambiante.

Les deux voies sont entièrement séparées.

Un pont diviseur placé en amont de chaque quartz permet de les attaquer sous faible impédance. La source délivre ainsi la fréquence d'excitation sous une charge constante quelle que soit l'impédance présentée par le résonateur.

En aval, la cellule de réglage est reliée par câble coaxial à l'amplificateur séparateur monté dans un boîtier blindé, dont la sortie alimente une batterie d'atténuateurs variables (4, 2 et 1 dB), le tout étant contenu dans un compartiment particulier.

Le déphaseur variable est constitué de différentes longueurs de câble coaxial faible bruit insérées en série dans le circuit par un jeu d'interrupteurs. Chacun occupe un compartiment séparé.

Un dernier compartiment contient le mélangeur et l'amplification très faible bruit, rassemblant la partie basse fréquence du système.

L'alimentation des différents amplificateurs est assurée par des piles, toujours dans le but de diminuer le bruit du banc. Chaque amplificateur possède sa propre alimentation placée dans le même compartiment.

L'analyse des niveaux de bruit en présence nécessite un mélangeur possédant un bruit propre suffisamment faible. Le développement de la technologie Schottky permet la réalisation de diodes faible bruit assez performantes pour l'application qui nous intéresse à des mélangeurs à diodes. Le modèle utilisé est le mélangeur Hewlett Packard HP 10514 A travaillant dans la gamme de fréquences 0.2 + 500 MHz.

1.3 - Pratique de la mesure

a) Choix des niveaux dans chaque voie

La courbe de sensibilité du mélangeur, donnée en figure 5 est tracée pour des niveaux d'attaque identiques sur chacune des entrées. Cela n'est pas une condition impérative au bon fonctionnement, mais dans le banc les niveaux des deux voies sont naturellement assez voisins et l'on s'arrange pour les rendre égaux au mieux grâce aux atténuateurs variables. On évite ainsi d'avoir à remesurer la sensibilité du mélangeur pour chaque mesure.

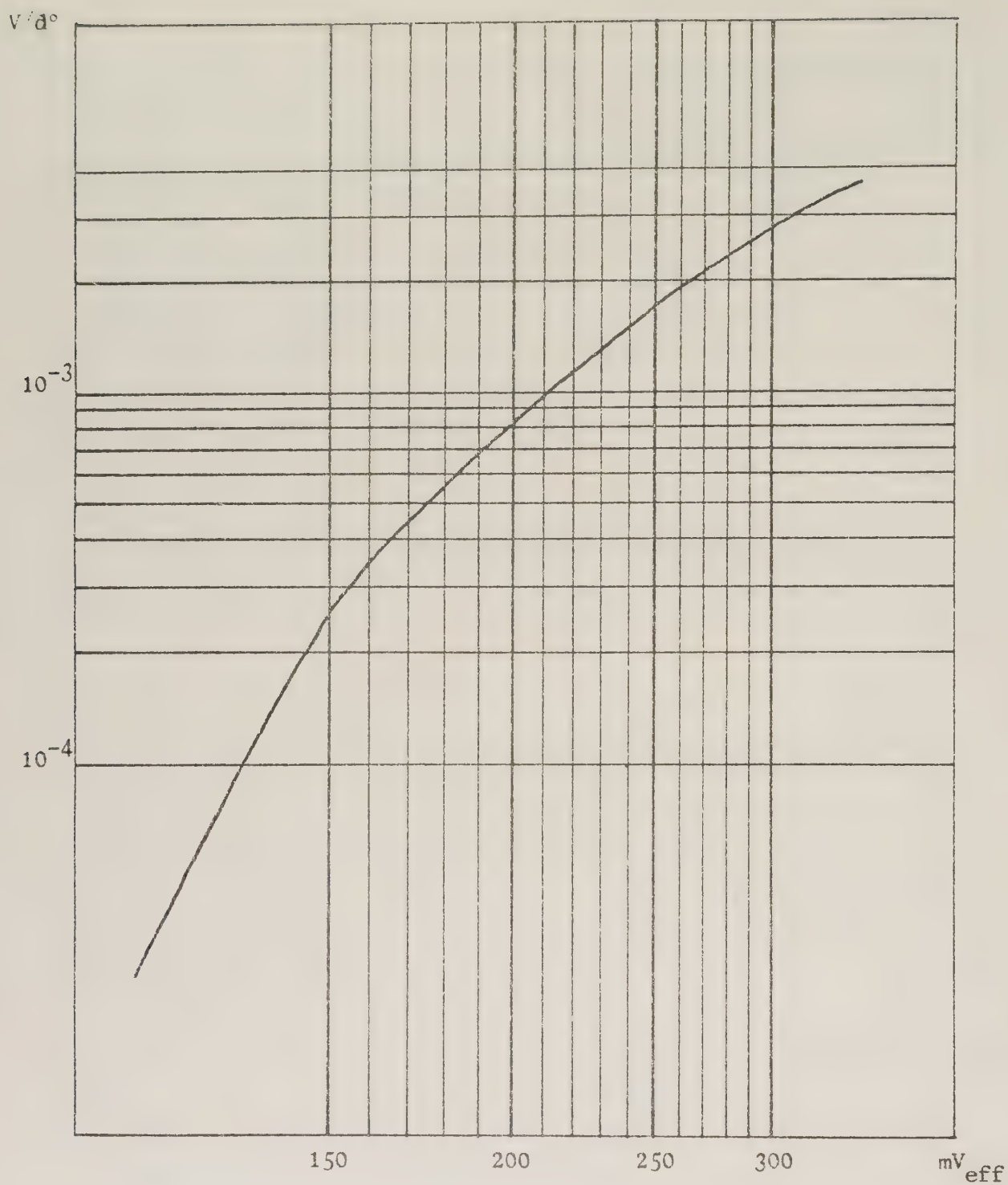
En pratique la zone de fonctionnement optimale se situe entre 200 mV et 300 mV efficaces en entrée.

b) Réglage de fréquence des résonateurs

Bien que choisis en général avec des paramètres les plus voisins possibles, les quartz à mesurer ne sont jamais rigoureusement identiques.

Nous avons retenu en première partie une méthode d'ajustement de fréquence de résonance par adjonction d'une capacité entre sortie du quartz et masse. L'efficacité de cette technique dépend des paramètres du quartz et en particulier pour des coefficients de qualité élevés (supérieurs à 10^6), on ne peut en pratique faire varier la fréquence que de quelques hertz, ce qui nécessite une sélection préalable des quartz à mesurer.

Les quartz de coefficient de qualité élevé qui nous intéressent plus particulièrement, ont des paramètres beaucoup trop sensibles à la température pour permettre une mesure en atmosphère ambiante. On les place donc dans une enceinte thermostatée, réglée en principe à la température d'inversion de la courbe fréquence-température pour laquelle la sensibilité à la température est minimale.



Sensibilité du mélangeur en fonction du niveau d'excitation
commun aux deux entrées

Fig. 5

Si de trop fortes valeurs de la capacité de réglage de fréquence sont nécessaires, le niveau de la résonance s'en trouve affecté. On peut compenser cette insuffisance en jouant sur la température d'enceinte quitte à s'écarter de la température d'inversion. Les capacités assurent le réglage fin.

c) Réglage "d'offset" du mélangeur

En pratique, le zéro de sortie du mélangeur ne correspond pas rigoureusement à une quadrature en phase des signaux d'entrée. Un voltmètre vectoriel placé aux entrées du mélangeur permet de vérifier l'égalité des niveaux appliqués et de fixer le déphasage des signaux à environ 90° . On parfait le réglage avec par exemple un oscilloscope en ramenant à zéro la composante continue de sortie par une combinaison adéquate des déphaseurs. Des réglages potentiométriques sont prévus sur l'amplificateur faible bruit, détaillé plus loin, pour annuler totalement cette composante et compenser des dérives lentes éventuelles sans perturber le réglage obtenu en amont.

d) Equilibrage des coefficients de qualité

Les fréquences de résonance étant ajustées, les coefficients de qualité doivent être amenés à la même valeur afin d'assurer la réjection du bruit de fréquence de la source. Le principe utilisé consiste à augmenter artificiellement le bruit de la source par une modulation de fréquence de faible indice.

Une raie de modulation apparaît alors à la sortie du mélangeur. L'équilibre des coefficients de qualité ramène cette raie à une valeur minimale.

Tout au long du réglage, les niveaux dans chaque voie doivent être maintenus égaux et la composante continue en sortie du mélangeur doit rester nulle.

Ces réglages permettent de réaliser une réjection du bruit de fréquence de la source de l'ordre de 50 à 60 dB.

1.4 - Interprétation des mesures

L'analyseur de spectres donne accès à la densité spectrale de puissance de la tension d'entrée (cf. 1ère partie). Soit $v(t)$ cette tension de bruit.

Si μ est la sensibilité du mélangeur et $\Phi(t)$ le bruit de phase total des deux quartz (somme des bruits de phase non corrélés dûs à chacun), on a simplement :

$$v = \mu \Phi$$

d'où : $S_{\Phi}(f) = (1/\mu^2) S_v(f)$, f fréquence de Fourier

La quantité $S_y(f)$ est elle-même reliée à $S_{\Phi}(f)$ par la relation (30) établie en première partie.

$$S_{\Phi}(f) = S_y(f) \frac{\omega_1^2}{(2\pi f)^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} \approx S_y(f) \frac{\omega_0^2}{(2\pi f)^2 + \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} \quad (1)$$

Le coefficient de qualité qui intervient dans la relation (1) est le coefficient de qualité en charge. ω_0 est la fréquence de résonance commune aux deux résonateurs.

Pour les fréquences de Fourier situées dans la bande passante des quartz, on obtient la relation simplifiée :

$$S_{\Phi}(f) = 4Q^2 S_y(f)$$

D'où finalement en fonction des indications fournies par l'analyseur :

$$S_y(f) = \frac{1}{4Q^2 \mu^2} S_v(f) \quad (2)$$

Le coefficient de qualité en charge s'obtient en mesurant la bande passante directement sur le spectre de l'analyseur où se voit en principe l'effet de filtrage des quartz.

Des exemples des différentes courbes obtenues sont donnés dans le chapitre consacré aux résultats expérimentaux.

Remarque :

L'étalonnage du banc de mesure est délicat. Pour le réaliser, une première méthode consiste à provoquer une très faible variation de la fréquence de résonance d'un des résonateurs ; la mesure du saut de tension continue correspondant donne la sensibilité totale du banc de mesure. Il est cependant difficile de faire varier d'une faible quantité connue avec précision la fréquence de résonance d'un quartz placé dans le banc. Ceci constitue un inconvénient notable de cette méthode : il faut donc recourir à une mesure séparée des divers éléments de la chaîne (bande passante en charge, sensibilité du mélangeur, gain de l'amplification faible bruit) pour pouvoir avoir accès au bruit des quartz à partir du bruit mesuré, ce qui multiplie les sources d'erreurs systématiques.

L'évaluation du bruit résiduel du banc est par contre plus aisée.

1.5 - Bruit du banc de mesure

a) Amplificateur faible bruit

Le schéma détaillé de cette partie importante du banc est donné par la figure 6. Il sera repris et modifié plus loin en vue d'autres applications.

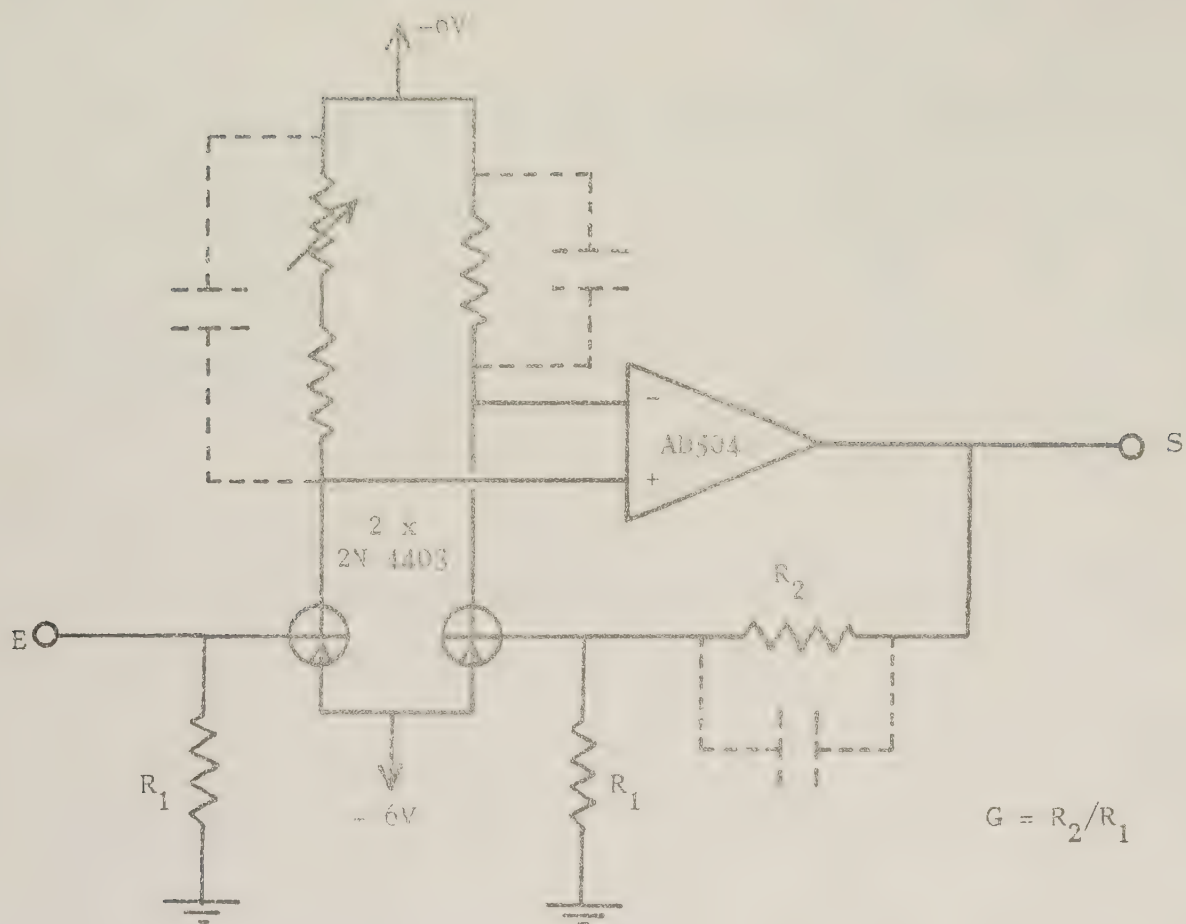
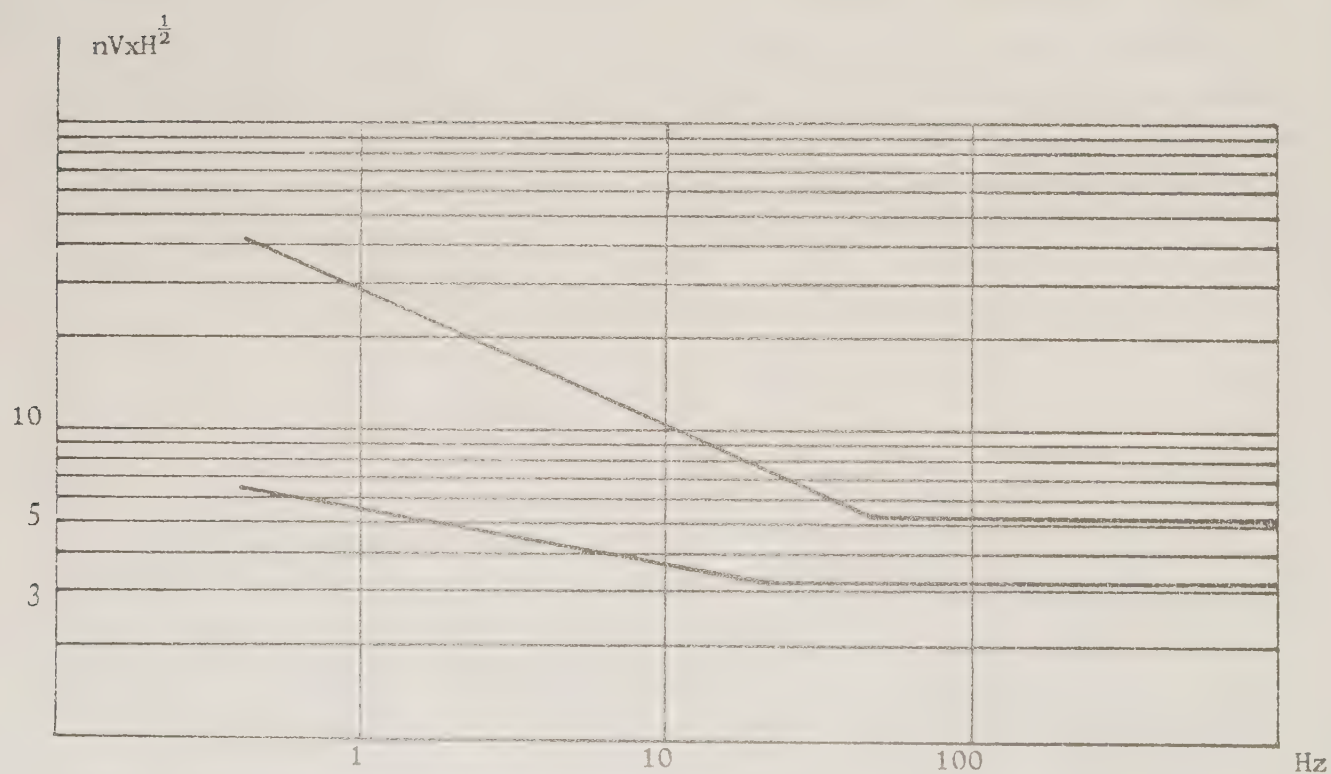


Fig. 6



Niveau de bruit ramené à l'entrée de l'amplificateur

Courbe supérieure $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$ $R_2 = 100 \text{ K}$

Courbe inférieure $R_1 = 50 \Omega$ $R_2 = 5 \text{ K}$

Fig. 7

Le gain est fixé par la contre-réaction sur l'amplificateur opérationnel à faible bruit. Le bruit du montage se ramène alors pratiquement à celui de la paire différentielle d'entrée, qui dépend principalement de la résistance R_1 .

En figure 7 sont données les courbes pour différentes valeurs de R_1 . Dans chaque cas le contre-réaction est modifiée pour assurer au système un gain de 100. On s'arrête à une valeur R_1 de 50 ohms qui est entre autres l'impédance de sortie du mélangeur.

En pratique, on place à l'entrée de l'amplificateur un filtre LC élémentaire pour filtrer les hautes fréquences issues du mélange.

b) Bruit résiduel du banc

Pour cette mesure, on remplace les résonateurs par des court-circuits ou par des résistances équivalentes.

Le banc fonctionne alors dans des conditions semblables à celles de la mesure, les fluctuations de fréquence de la source étant en principe éliminées par les deux voies identiques.

Les signaux appliqués à l'entrée du mélangeur peuvent s'écrire de la façon suivante, en supposant qu'ils sont maintenus au même niveau :

$$E_1 = (A + a_1(t)) \cos (\omega_0 t + \phi_1(t))$$

$$E_2 = (A + a_2(t)) \cos (\omega_0 t + \phi_2(t) + \theta)$$

$a_1(t)$ et $a_2(t)$ sont des bruits d'amplitude dûs à la source et aux amplificateurs d'isolation.

$\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sont les bruits de phase dûs aux mêmes éléments.

Pour une étude détaillée du comparateur de phase à diodes, on pourra se reporter à la référence 7. On montre ainsi qu'avec les signaux d'entrée considérés ci-dessus, on obtient en sortie une tension de bruit donnée par la relation suivante :

$$\theta < \theta + \phi_2 - \phi_1 < \pi$$

$$v_s(t) = 2K (A+a_1(t)+a_2(t)) \cos \left(\frac{\theta + \phi_2(t) - \phi_1(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\pi < \theta + \phi_2 - \phi_1 < 2\pi$$

(3)

$$v_s(t) = -2K (A+a_1(t)+a_2(t)) \cos \left(\frac{\theta - \phi_2(t) - \phi_1(t)}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

De fait, on réalise les conditions :

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \ll \theta \quad \text{et} \quad \theta = \pi/2$$

On a alors pour $v_s(t)$ la forme suivante :

$$v_s(t) = K [A + a_1(t) + a_2(t)] [\phi_2(t) - \phi_1(t)]$$

A cette tension de bruit s'ajoute le bruit du mélangeur et de l'amplificateur dont la somme sera notée $n(t)$. Le bruit total est donc :

$$b(t) = K [A+a_1(t)+a_2(t)] [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + n(t)$$

En principe donc le terme $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ ne contient que les contributions des amplificateurs d'isolation et du mélangeur. Cependant G. SAUVAGE [8] a montré la nécessité d'employer une source ultrastable pour la mesure du bruit résiduel de ce type de banc. Pour une source de qualité insuffisante, le bruit de phase faiblement décorrélié $((\phi_2 - \phi_1)_{\text{source}} \neq 0)$ peut en effet fausser la mesure de $b(t)$.

Ainsi donc pour une série de mesures effectuées autour de la fréquence 5 MHz, on peut évaluer le bruit du banc en utilisant le principe décrit ici avec comme source un oscillateur 5 MHz ultrastable. On peut aussi envisager l'utilisation d'un synthétiseur à synthèse directe qui, à partir d'une source 5 MHz délivre en principe une fréquence possédant les propriétés de stabilité voisines de celles de cette source.

Dans l'expression de $b(t)$, les termes $a_1(t)$ et $a_2(t)$ représentant le bruit d'amplitude des deux voies sont négligeables au premier ordre. Soit :

$$b(t) = kA [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + n(t) \quad (4)$$

Ce terme représente bien le niveau de bruit résiduel du banc de mesure. La sensibilité du mélangeur dépendant de l'amplitude A des signaux d'entrée, le bruit mesuré en dépend également. Chaque mesure ultérieure doit donc être en principe interprétée par rapport au bruit résiduel mesuré dans les mêmes conditions (même valeur de A).

c) Interprétation en termes de densité spectrale de puissance

Pour une mesure donnée, les quartz sont caractérisés par une densité spectrale de puissance $S_y(f)$, obtenue à partir des indications de l'analyseur grâce à la relation (2) dans laquelle intervient entre autres le coefficient de qualité Q en charge des quartz.

On peut interpréter le bruit du banc correspondant à cette mesure dans les mêmes termes. Il suffit d'utiliser la formule (2) avec pour $S_v(f)$ le spectre du bruit du banc.

On obtient ainsi un terme $S_y(f)$ qui représente le spectre $S_y(f)$ qu'auraient les quartz $S_{y_{\text{banc}}}$ s'ils apportaient en sortie de la chaîne de mesure un niveau de bruit égal à celui du banc.

Reprenons l'expression de la très importante formule (2).

On peut effectuer pour les mêmes quartz la mesure avec des valeurs différentes du coefficient de qualité en charge selon le principe même du banc. On constate alors que pour le coefficient de qualité le plus grand, $S_y(f)$ devant rester le même, $S_v(f)$ donné par l'analyseur est d'un niveau plus élevé. Dans le même temps, le spectre $S_{y_{\text{banc}}}(f)$ correspondant fournira lui des valeurs plus faibles donc plus éloignées du résultat $S_y(f)$ de la mesure.

Ces constatations montrent qu'il est donc préférable de se rapprocher du coefficient de qualité à vide, qui constitue la limite théorique, pour la réalisation de la mesure. On pourrait par exemple songer à mettre le quartz dans un montage en π du type de celui utilisé pour la mesure des paramètres aux basses températures. L'inconvénient est que plus la charge du quartz est faible, plus le signal recueilli pour l'analyse est faible. Or le mélangeur ne peut fonctionner qu'avec des niveaux d'entrée minimum, et l'on ne peut envisager pour des raisons de bruit l'utilisation d'amplificateurs de fort gain dans les voies du banc. D'autre part, le montage en π diminue l'efficacité des ajustements de paramètres.

On est donc contraint de choisir la charge du quartz qui permet de travailler avec un niveau d'entrée convenable sur le mélangeur en alignant le coefficient de qualité le plus élevé sur l'autre, à partir d'une charge minimale dans les deux voies du banc au début de la mesure.

2 - Résonateurs de fréquences différentes : 2ème méthode

2.1 - Introduction

L'application aux basses températures de la méthode de mesure décrite au chapitre précédent se heurte à une difficulté majeure : si deux quartz ont en effet les mêmes fréquences à température ambiante, chacune d'elles subit au cours de la descente en température une variation importante : de 5 à 6 KHz pour des quartz 5 MHz P5. Si bien qu'à la température de l'hélium liquide, ces fréquences peuvent être trop éloignées l'une de l'autre et la mesure de bruit n'est plus possible puisque le pont de phase ne peut plus être équilibré.

Il est donc intéressant et nécessaire de disposer d'une méthode de mesure qui soit applicable au cas où les fréquences de résonance sont différentes.

Le principe utilisé est le suivant :

2.2 - Principe

Le dispositif mis au point est représenté sur la figure 8. On pratique une modulation de phase de la source, telle que chaque raie latérale engendrée se situe à la résonance d'un des résonateurs. On peut utiliser un indice de modulation 2,4 pour lequel la porteuse est annulée et les raies latérales proches du maximum.

Le mélangeur 1 est sensible à la différence de phase instantanée entre les deux signaux présents à ses entrées, et transpose donc sur la fréquence intermédiaire $2f$ le bruit de phase amené par les quartz.

Le second mélangeur, basse fréquence, réalise une deuxième transposition qui permet l'analyse spectrale dans les conditions habituelles.

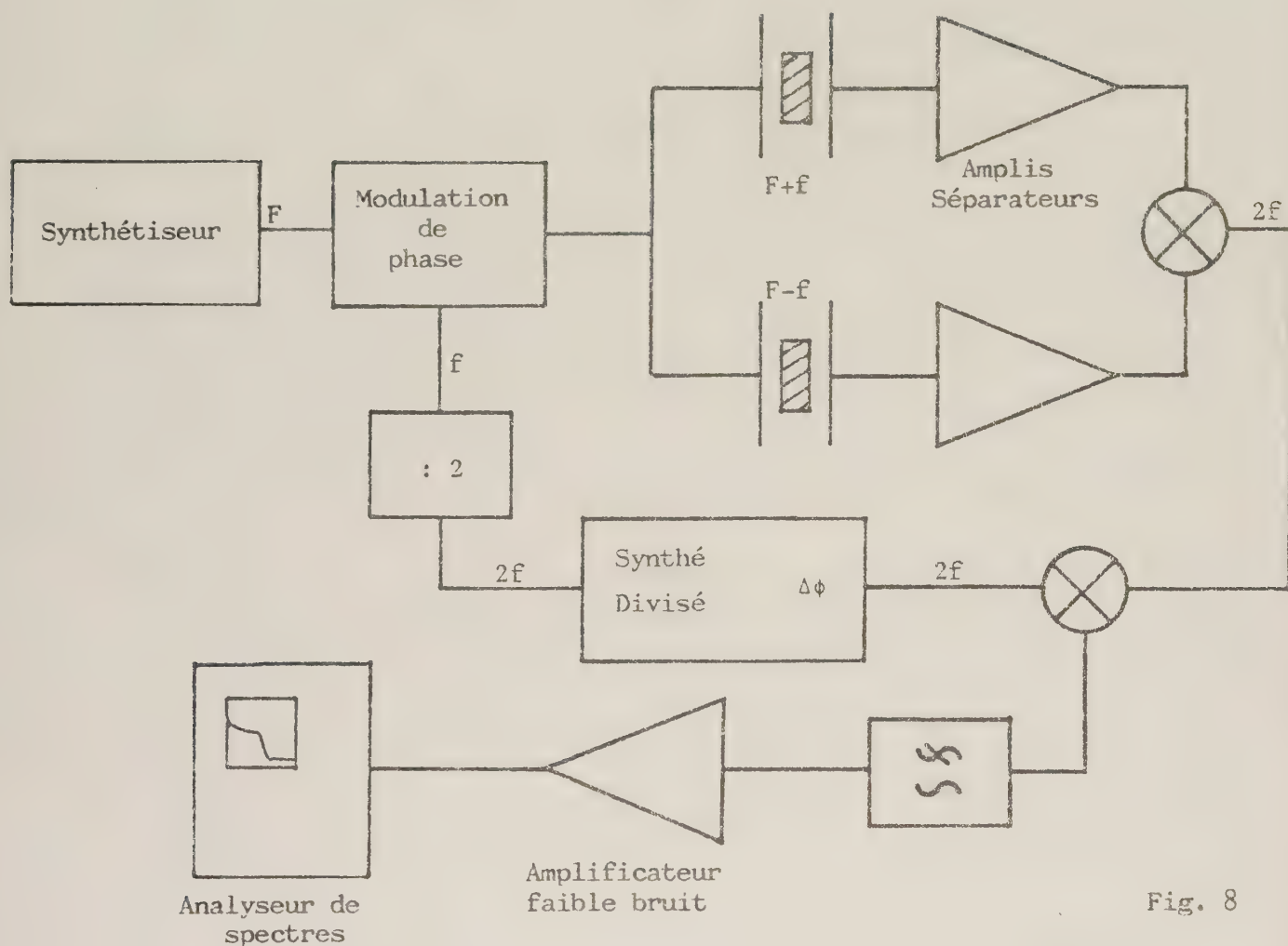


Fig. 8

2.3 - Influence du bruit des sources

Dans cette configuration, le bruit du synthétiseur de porteuse peut être éliminé en principe en effectuant comme dans le premier banc de mesure un équilibrage de coefficient de qualité.

On remarque par contre qu'une petite variation de la fréquence f provoque par l'intermédiaire des réponses fréquence/phase des quartz, des écarts de phase opposés dans chaque voie, et qui vont se retrouver ainsi directement superposés au bruit propre des résonateurs.

Ce problème peut être résolu en utilisant pour engendrer f , une source synthétisée de haute fréquence et très stable, qui est ensuite divisée pour obtenir la valeur basse fréquence voulue.

Les écarts absolus présents au niveau de la fréquence f sont alors divisés par le rapport de division utilisé et peuvent ainsi avoir un effet négligeable devant la contribution des quartz.

Il est à noter que cette propriété que possède la fréquence de modulation f de voir ses fluctuations directement superposées à celles du quartz peut être utilisée pour étalonner toute la chaîne de mesure. Supposons en effet que l'on déplace la fréquence de modulation d'une quantité Δf . Tout se passe alors comme si pour l'un des quartz la fréquence de résonance avait augmenté de $\Delta f/2$ et pour l'autre diminué de la même quantité. Il en résulte deux variations de phase $\pm \Delta \phi/2$ dans chaque voie, d'où une variation globale $\Delta \phi$ après le premier mélange et une tension continue ΔV en sortie de l'amplificateur. Le rapport $\Delta V/\Delta f$ donne alors la sensibilité globale du système. C'est là un moyen rapide et sûr de connaître cette quantité, dans les conditions exactes où s'effectue la mesure, ce qui constitue un avantage appréciable par rapport à la méthode précédente où chaque paramètre de la chaîne devait être mesuré séparément.

2.4 - Banc prototype - Premiers essais

Un banc prototype a été réalisé selon le principe exposé ci-dessus.

La partie HF était celle utilisée auparavant. Le déphasage BF variable était assuré par un montage à transistors et le second mélangeur était à diodes.

Pour tester ce banc, la série de mesures suivantes à été effectuée :

• deux quartz de fréquence 4,972 MHz ont été mesurés par la méthode classique : $S_y(1 \text{ Hz}) = 2 \cdot 10^{-24}$.

* deux quartz 5 MHz P5 de qualité médiocre sont mesurés de la même façon : $S_y(1 \text{ Hz}) = 2.5 \cdot 10^{-21}$

~ En appliquant le nouveau principe, on fait une mesure avec un quartz de chaque paire → $S_y(1 \text{ Hz}) = 1.5 \cdot 10^{-21}$.

Dans cette configuration, seul le bruit du quartz le plus mauvais (5 MHz) est mesuré comme prévu.

Ces résultats encourageants ont conduit à la construction d'un autre banc plus performant dont la description est donnée en figure 9.

2.5 - Nouveau banc définitif

a) Génération des raies de modulation

La modulation d'amplitude sans porteuse, réalisée avec un mélangeur équilibré du même type que celui déjà utilisé (HP 10514 A), est adoptée pour sa simplicité de mise en oeuvre et le fait que seules sont engendrées les raies de modulation utiles à la manipulation.

b) Division, déphasage et mélange basse fréquence

Ces trois fonctions sont assurées par un système digital complexe dont un synoptique général est donné en figure 10.

Le principe du déphasage est le suivant. Au cours d'une demi-période du signal $2f$ issu de la division, l'une des batteries de comptage programmé enregistre les impulsions haute fréquence et délivre une retenue avec un retard par rapport au début

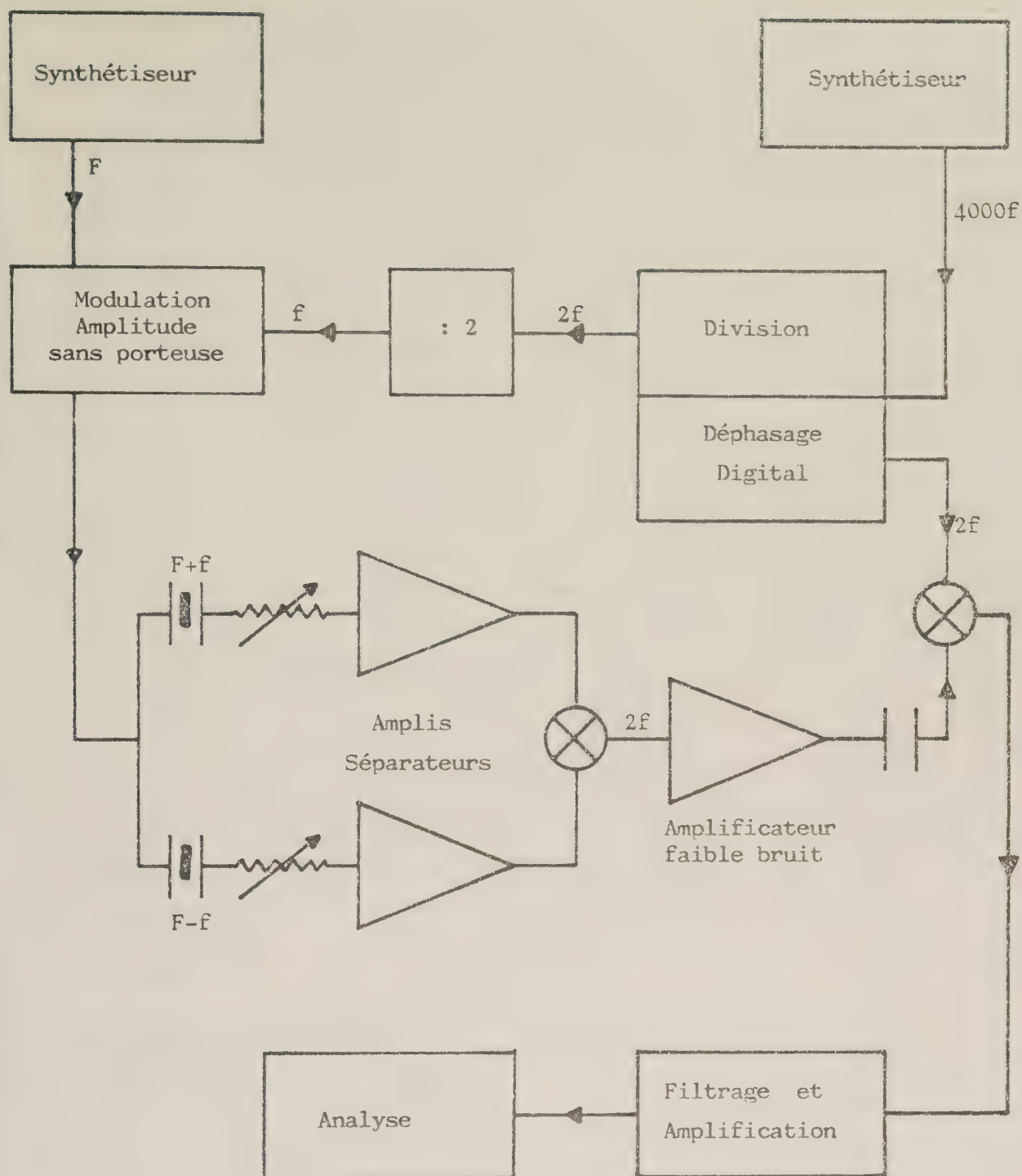


Fig. 9

Synoptique général du nouveau banc de mesure

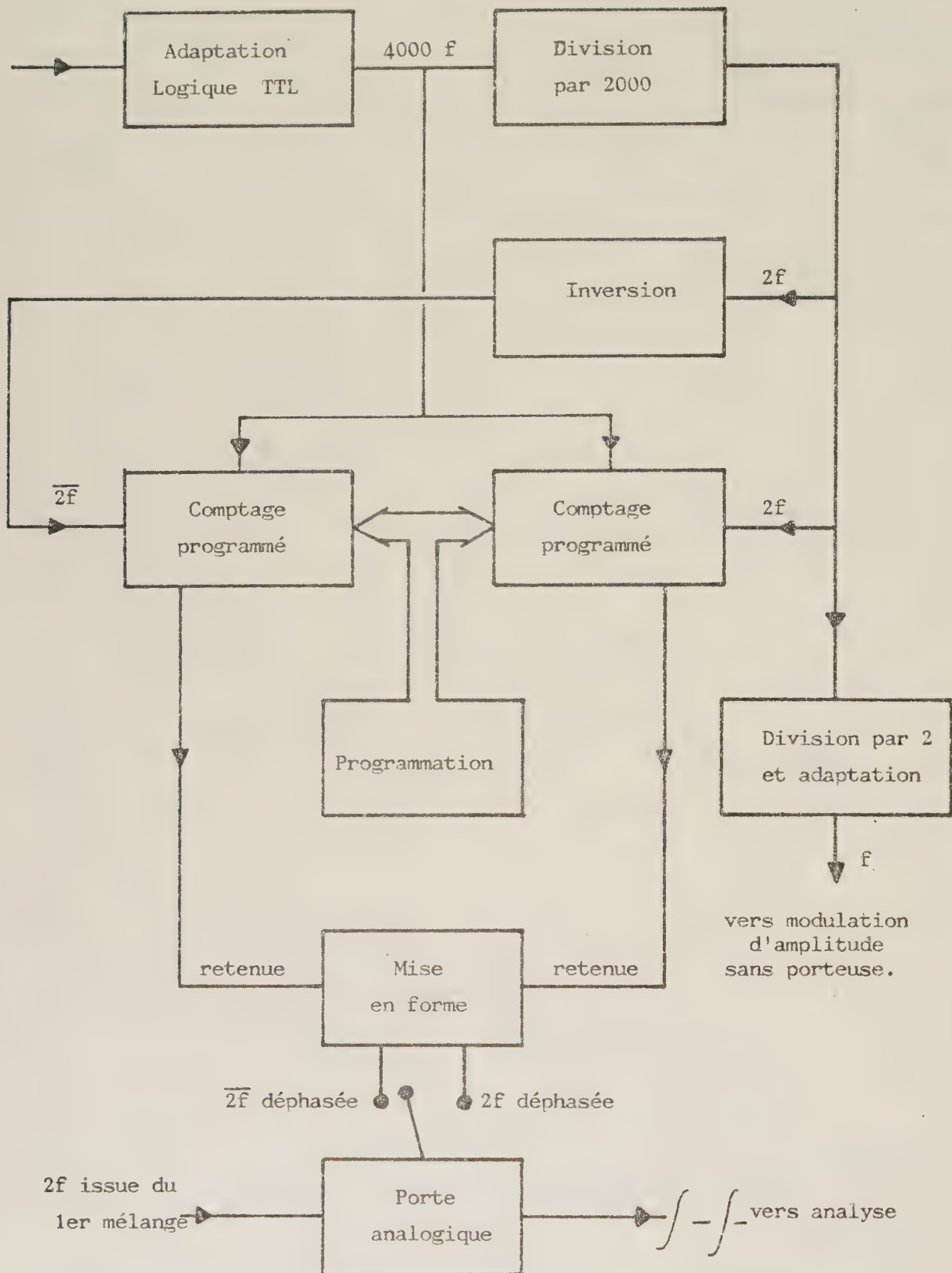


Fig. 10

Bloc diagramme du système de division et déphasage digital
2e mélange incorporé

de la validation qui dépend de la programmation. Au cours de la demi-période suivante, c'est l'autre batterie de comptage qui délivre une retenue avec le même retard. Ces deux impulsions servent à mettre en forme un signal digital de fréquence $2f$ déphasé par rapport au signal initial de la valeur affichée par la programmation (de 0 à π avec un pas de $\pi/10^3$). L'utilisation de cette fréquence ou de la fréquence en opposition de phase permet un déphasage effectif de 2π .

La fréquence $2f$ digitale à phase variable sert de commande à une porte qui laisse ainsi passer une alternance sur deux de la fréquence $2f$ analogique issue du premier mélange. Après réglage convenable du déphasage, le signal de sortie a l'allure indiquée figure 10. Sa valeur moyenne est nulle et le bruit à analyser correspond à sa composante très basse fréquence, qu'il faut extraire.

c) Obtention et traitement de la fréquence intermédiaire

La partie haute fréquence du système reste la même que précédemment. Les capacités de réglage de fréquence des quartz sont en principe inutiles mais peuvent être conservées pour rendre plus souple l'équilibrage des deux voies. En sortie du premier mélangeur, l'amplificateur très faible bruit est monté en gain faible (10 au plus), pour améliorer la sensibilité du second mélange tout en conservant des niveaux acceptables ($2 V_{cc}$ environ). On peut encore purifier cette FI en éliminant à ce niveau les composantes de bruit très basse fréquence par une capacité en série. On prépare ainsi le second mélange dans des conditions optimales.

d) Extraction du bruit - Analyse

Il s'agit là du problème le plus délicat posé par le montage. Il faut en effet réaliser un filtre amplificateur passe bas de très faible bruit et de fort pouvoir réjecteur.

Pour conserver des performances en bruit acceptables, on a recherché à modifier le schéma de l'amplificateur très faible bruit décrit au chapitre précédent. Une simple capacité placée en parallèle sur la réaction de l'amplificateur opérationnel permet de diminuer le gain de l'amplificateur pour les composantes alternatives (figure 6). Cela confère cependant à l'ensemble des tendances à l'autooscillation qui peuvent être compensées par les capacités montées dans les résistances de collecteur de la paire différentielle d'entrée comme indiqué sur la figure.

Ainsi modifié, l'amplificateur peut être monté en gain 100 pour les composantes très basse fréquence et ne pas amplifier ou très peu les composantes alternatives gênantes. Ayant par là amélioré le rapport Signal sur bruit ((composante TBF) / Composantes BF de fréquence $2f$ et harmoniques), on peut alors construire des filtres passe bas, aux contraintes en bruit moins fortes, permettant d'éliminer totalement les composantes gênantes et achevant l'amplification du bruit à analyser.

Deux cellules de filtres actifs Butterworth d'ordre 3 à gain affichable ont été réalisées et placées en série à la suite du 1er étage. Le schéma de principe de ces cellules est donné en figure 11.

En vue d'une application à la mesure de quartz aux coefficients de qualité élevés, ce qui est presque toujours le cas dans l'hélium, une bande de 15 à 20 Hz est suffisante pour ces filtres, couvrant largement la zone de fréquences de Fourier intéressantes pour l'analyse du bruit attendu. Cela permet ainsi de travailler avec des quartz aux fréquences proches jusqu'à environ 100 Hz. Dans ce cas la composante de fréquence $2f$ est encore convenablement atténuée. A l'inverse, l'écart maximum entre les fréquences peut être fixé actuellement à 3 KHz. Au delà la fréquence HF du synthétiseur de modulation s'élève et pose des problèmes d'acceptation par la logique TTL utilisée. On peut cependant envisager une amélioration des performances sur ce point.

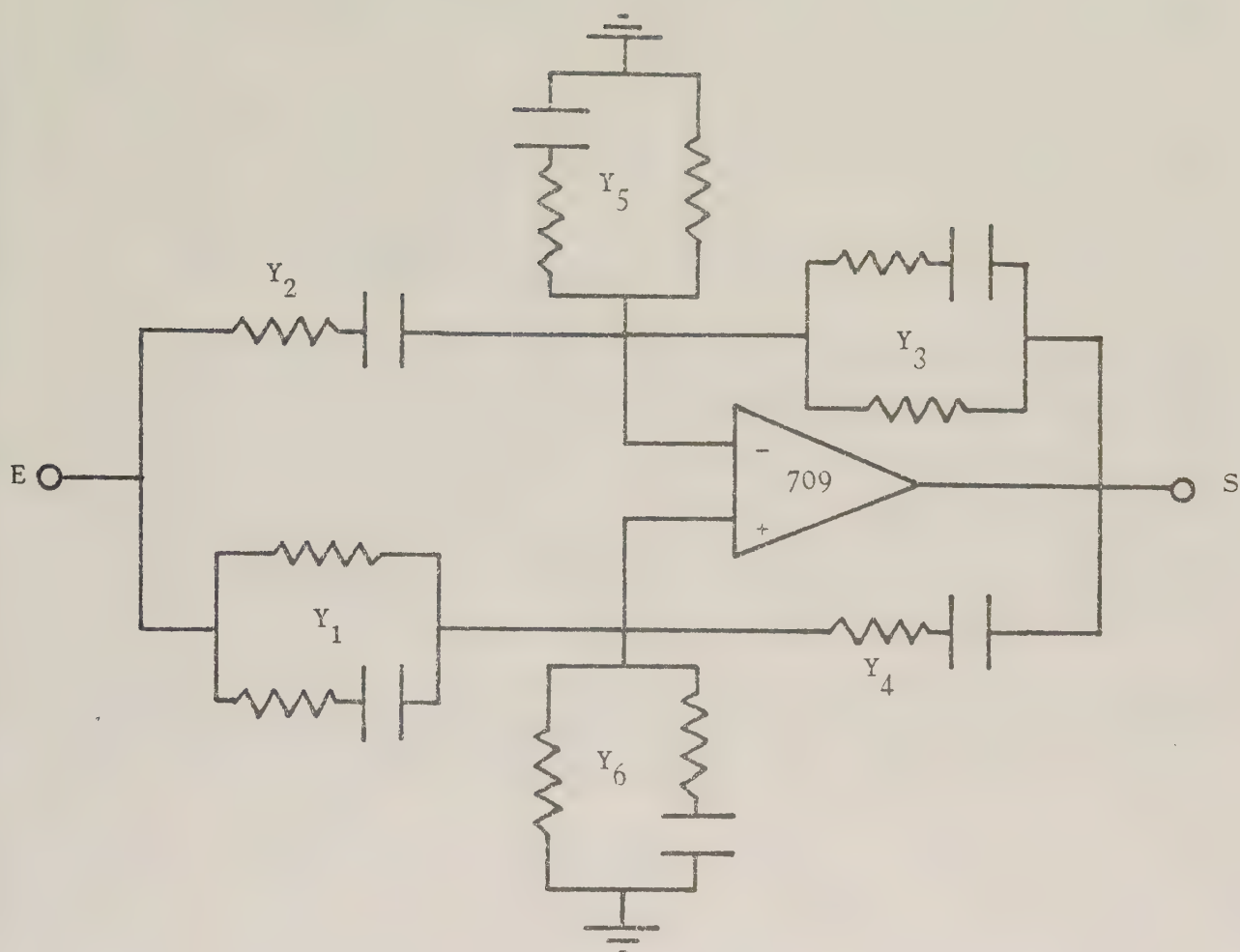


Fig. 11

Schéma type de l'une des cellules filtre
suivant le premier étage faible bruit

En fonction du gain k choisi, les admittances normalisées
des différents dipôles sont données par les relations suivantes :

$$Y_1 = k/2 + kp/(2p+4)$$

$$Y_2 = kp/(p+1)$$

$$Y_3 = p + \frac{1}{2}$$

$$Y_4 = 3p/(2p+4)$$

$$Y_5 = (k-1)/2 + (k+3)p/(2p+4)$$

$$Y_6 = p + kp/(p+1)$$

2.6 - Pratique de la mesure

Le réglage des coefficients de qualité s'effectue de la même façon que pour l'autre banc en annulant une raie de modulation provoquée sur la porteuse.

Avec les coefficients de qualité élevés (plusieurs millions) qui sont rencontrés dans l'hélium, cet équilibrage est très efficace et on atteint des réjections de 60 dB. Les sensibilités importantes rendent cependant cette manipulation délicate.

Il faut aussi noter que la grande stabilité de température obtenue dans l'hélium liquide permet de travailler dans de meilleures conditions qu'avec des enceintes thermostatées à température ambiante pour lesquelles des dérives systématiques sont inévitables. De plus, à 4°K, la sensibilité à la température de la fréquence de résonance des quartz est quasiment nulle.

La mesure de la sensibilité décrite plus haut donne un rapport $\Delta v / \Delta f = \lambda$. Donc à une tension δv lue sur l'analyseur de spectre correspond un écart de fréquence δf donné par :

$$\delta f = \frac{\delta v}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \frac{\delta f}{f_0} = \frac{\delta v}{\lambda f_0}$$

et par suite :

$$S_y(f) = \frac{1}{\lambda^2 f_0^2} S_v(f)$$

La valeur de $S_v(f)$ est déduite des indications fournies par l'analyseur.

2.7 - Considérations sur le bruit du banc

Le principal désavantage de ce système est de ne pouvoir fournir par une mesure simple une estimation de son bruit propre résiduel.

En effet, les conditions normales de fonctionnement exigent la présence des quartz en raison de leur effet de filtrage sur l'une des deux raies de la modulation, ce qui assure le fonctionnement séparé des deux voies sur deux fréquences différentes.

On est donc conduit à faire une étude par éléments du système.

a) HF et premier mélange

C'est la partie la plus délicate à étudier et il est même impossible d'atteindre par une mesure directe sa contribution effective au bruit résiduel.

On peut considérer cependant que les amplificateurs séparateurs apportent le même bruit de phase que dans le cas où les fréquences de fonctionnement des deux voies sont identiques.

Seul est changé le mode de fonctionnement du mélangeur, que nous allons étudier de plus près.

Considérons les signaux d'entrée :

$$E_1 = (A + a_1(t)) \cos (2\pi(F+f)t + \phi_1(t))$$

$$E_2 = (A + a_2(t)) \cos (2\pi(F-f)t + \phi_2(t))$$

On s'arrange en effet pour conserver des niveaux voisins.

La fréquence f étant faible devant F , on peut adopter pour le signal de sortie l'expression suivante [7] :

$$\phi(t) = 4\pi ft + \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

$$0 < \phi(t) < \pi$$

$$v_s(t) = 2K [A+a_1(t)+a_2(t)] \cos \left[2\pi ft + \frac{\phi_1(t)-\phi_2(t)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (5)$$

$$\pi < \phi(t) < 2\pi$$

$$v_s(t) = -2K [A+a_1(t)+a_2(t)] \cos \left[2\pi ft + \frac{\phi_1(t)-\phi_2(t)}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$

On peut envisager 3 effets pour le bruit du mélangeur :

1°) bruit thermique ajouté à la fréquence intermédiaire $n(t)$.

2°) bruit thermique transformé en bruit d'amplitude de la fréquence intermédiaire et que l'on inclura avec a_1 et a_2 dans un terme $a(t)$ général.

3°) dérives aléatoires des caractéristiques des diodes dont on peut schématiser l'influence en considérant que les limites prises en compte pour $\phi(t)$ dans les formules (5) sont des valeurs aléatoires autour des valeurs moyennes indiquées. Cela revient à ajouter à $\phi(t)$ un terme de bruit de phase $\theta(t)$ dû au mélangeur, ce qui conduit aux relations suivantes :

$$\phi(t) = 4\pi ft + \phi_1(t) - \phi_2(t) + \theta(t)$$

$$0 < \phi(t) < \pi$$

$$v_s(t) = 2K [A+a(t)] \cos \left[2\pi ft + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}(t) + \theta(t) + \frac{\pi}{4} \right] + n(t) \quad (6)$$

$$\pi < \phi(t) < 2\pi$$

$$v_s(t) = -2K [A+a(t)] \cos \left[2\pi ft + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}(t) + \theta(t) - \frac{\pi}{4} \right] + n(t)$$

$v_s(t)$ est un signal de fréquence $2f$ affecté de trois formes de bruit distinctes.

Considérons maintenant le cas où f est nulle et qu'un déphasage de $\pi/2$ est assuré entre les deux voies. Ce cas de figure est celui du premier banc. On trouve :

$$v_s(t) \approx -2K [A+a'(t)] \left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}(t) + \theta'(t) \right] + n'(t) \quad (7)$$

Les notations des différents bruits sont changées pour tenir compte des conditions de fonctionnement différentes.

Dans les deux cas les bruits $a(t)$ et $a'(t)$ ont une contribution négligeable au premier ordre.

Les composantes $\theta(t)$ et $\theta'(t)$ s'ajoutent au bruit mesuré.

Par contre, si $n'(t)$ se superpose aussi directement au bruit mesuré, $n(t)$ peut être éliminée par filtrage, ce qui est d'ailleurs réalisé en pratique.

Il est donc dans ces conditions raisonnable d'admettre que la contribution du mélangeur au bruit résiduel dans le nouveau montage n'est pas supérieure à celle mesurée dans l'ancien, ce qui doit conférer aux deux systèmes, pour cette partie, des performances comparables.

Notons enfin que dans le nouveau banc le rapport signal = bruit de phase / bruit thermique additif est encore amélioré par une amplification très faible bruit suivie du filtrage de toutes les composantes très basse fréquence juste avant le second mélange.

b) FI et second mélange

On peut mesurer le bruit de cet étage puisque l'on est cette fois en présence d'un mélange effectué sur deux voies à la même fréquence.

Il suffit donc de boucler la sortie $2f$ non déphasée, qui sert à générer la fréquence f de modulation, sur l'entrée de l'amplificateur très faible bruit normalement placé en sortie du premier mélange.

On mesure alors le bruit de tout le système de déphasage digital et d'amplification FI, auquel vient s'ajouter le bruit du 2ème mélange et du filtre-amplificateur terminal.

Ce dernier a un bruit propre comparable à celui de l'amplificateur faible bruit non modifié.

L'ensemble a un bruit à peine supérieur, qui n'affecte pas les performances du banc, la limitation provenant de la partie HF, comme le montre la mesure effectuée pour le 1er banc.

On considérera donc que les deux bancs ont le même niveau de bruit propre.

Conclusion

On dispose ainsi de deux méthodes de mesure aux performances équivalentes, dont le champ d'application, les qualités et les défauts sont complémentaires.

Cela offre tout un éventail de possibilités pour la mesure d'une famille de quartz donnée, avec recoupements éventuels. On verra ainsi par exemple des quartz de fréquences 5 MHz et 5 MHz+1KHz mesurés entre eux puis formant des paires croisées pour des mesures à température ambiante et à 4°K.

Ces deux systèmes dont la mise en oeuvre est cependant assez lourde apparaissent mal adaptés pour la mesure de résonateurs de qualité médiocre. Pour ceux-là, une approche plus directe peut être envisagée qui fait l'objet du paragraphe suivant.

3 - Mesure de quartz de qualité médiocre

Nous avons vu dans l'étude théorique que si l'on peut disposer d'une source ayant un bruit propre de fréquence nettement inférieur à celui attendu pour certains résonateurs à mesurer (en particulier dans le cas de faibles coefficients de qualité), une mesure directe est envisageable.

Pour une telle mesure, on utilise le même montage que pour la 1ère méthode en remplaçant l'un des quartz par un court-circuit.

On trouve effectivement certains quartz mesurables ainsi (voir paragraphe consacré aux résultats).

Remarque :

On peut interpréter les résultats comme pour la première méthode par la connaissance des différents paramètres de la chaîne de mesure.

Cependant on peut étalonner directement comme dans la 2ème méthode. En effet une petite variation de la fréquence de la source est transformée dans la voie contenant le quartz mesuré en variation de phase qui provoque l'apparition d'une tension continue en sortie de la chaîne. L'effet produit est le même que si la fréquence propre du quartz s'était déplacée d'une quantité identique.

Nous n'avons pas par cette méthode pratiqué de mesure sur le pic de l'interaction phonon-phonon.

Il serait pour cela souhaitable de disposer d'un système de contrôle de température permettant de se placer précisément à la valeur correspondant à ce pic.

III RESULTATS

1) Paramètres des résonateurs

QUARTZ	R_{amb} Ω	Q_{amb} $\times 10^6$	Δf KHz	R He Ω	Q He $\times 10^6$
5 MHz coupe SC mode B	-	-	6,5	10	10
mode C	70	2,3	6,5	15	8
5 MHz	30	0,73	8	15	1,6
4,972 MHz Partiel 5	59	2,5	5	9	14,5
4.972 MHz P5	60	2,7	5	9	16
5 MHz P5	98	2,4	5,4	84	3
5 MHz P5	95	2	5,5	11	21
5 MHz P5	91	2,3	5,6	15	14
5 MHz P5	80	2,7	5,7	10	19
5 MHz P5	99	2,2	5,5	5	40
5 MHz P5	98	2,6	5,5	5	40
5 MHz P5	109	2,4	5,7	14	22
5 MHz P5	70	2,4	5,5	4	20
5 MHz P5	19	1,8	6,1	3	6
5 MHz P5	58	2,4	5,8	10	6
5 MHz + 1 KHz P5	83	1,8	5,5	12	5
5 MHz + 1 KHz P5	82	2	5,4	13	6
5 MHz fondamental	8	0,8	6,7	1,8	1,6
5 MHz P5	60	1,7	5,4	6,8	32
5 MHz P5	30	2	5,4	3,7	55

Le tableau ci-contre donne la résistance motionnelle et le coefficient de qualité à la température ambiante et à celle de l'hélium liquide. Est également indiquée la dérive de la fréquence de résonance entre ces deux températures.

Le paramètre Δf est à peu près le même pour tous les quartz 5 MHz, partiel 5. Par contre l'évolution de la résistance motionnelle et du coefficient de qualité sont très variables.

Quelques quartz très bons a priori ont été portés à la température de 1,2°K avec les résultats suivants :

Q		R _{He}	Q _{He}	R _{1,2K}	Q _{1,2K}
5 MHz	P5	6,8	32	5,6	38
5 MHz	P5	3,7	55	2,3	93
4,972 MHz	P5	9	14,5	9	14,5
5 MHz	P5	84	3	80	3,6
5 MHz	P5	5	40	4	54

Les courbes de résonance d'amplitude du meilleur quartz sont représentées en page suivante.

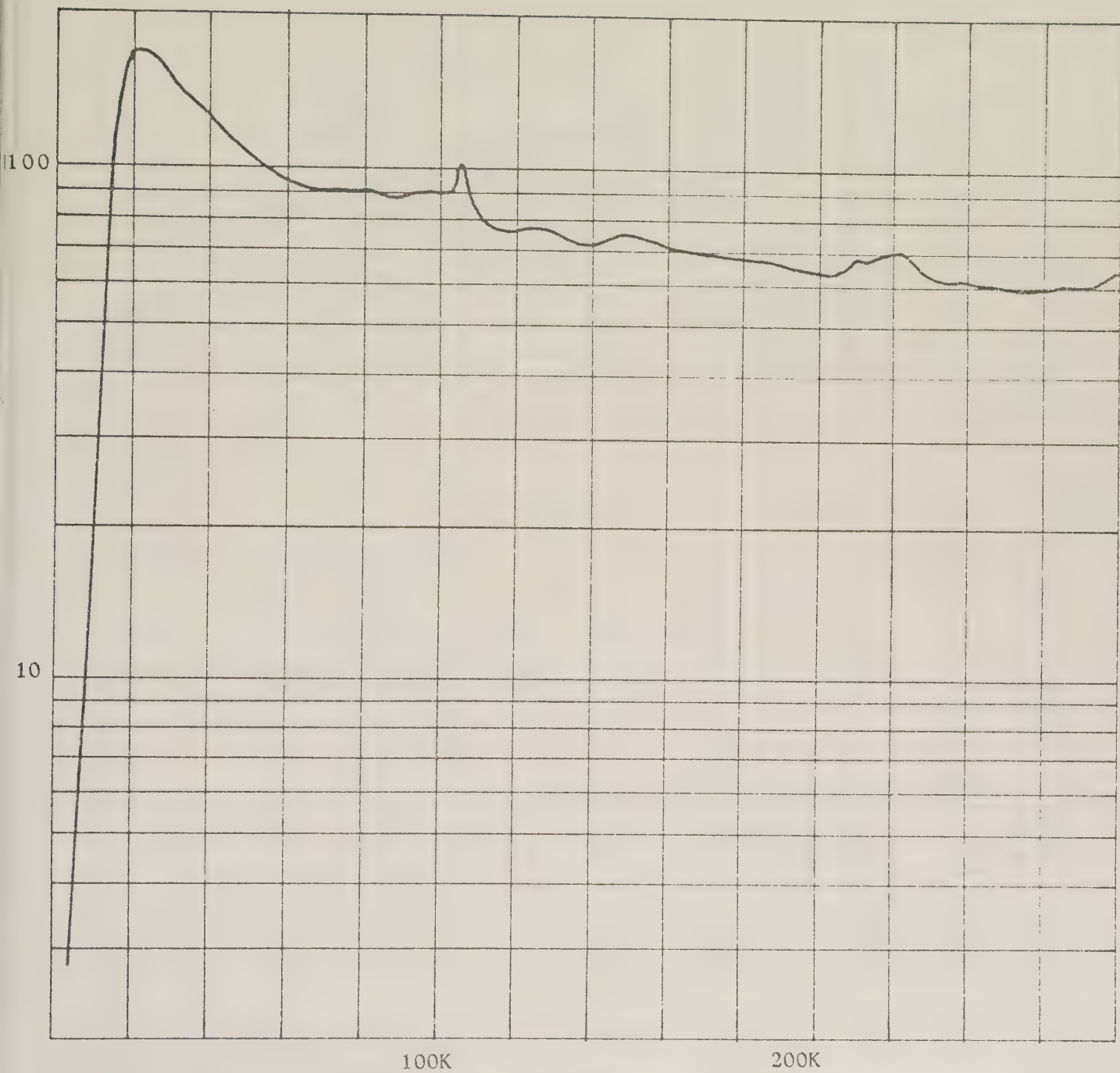


Enregistrement des courbes de réponse en amplitude
du meilleur quartz mesuré

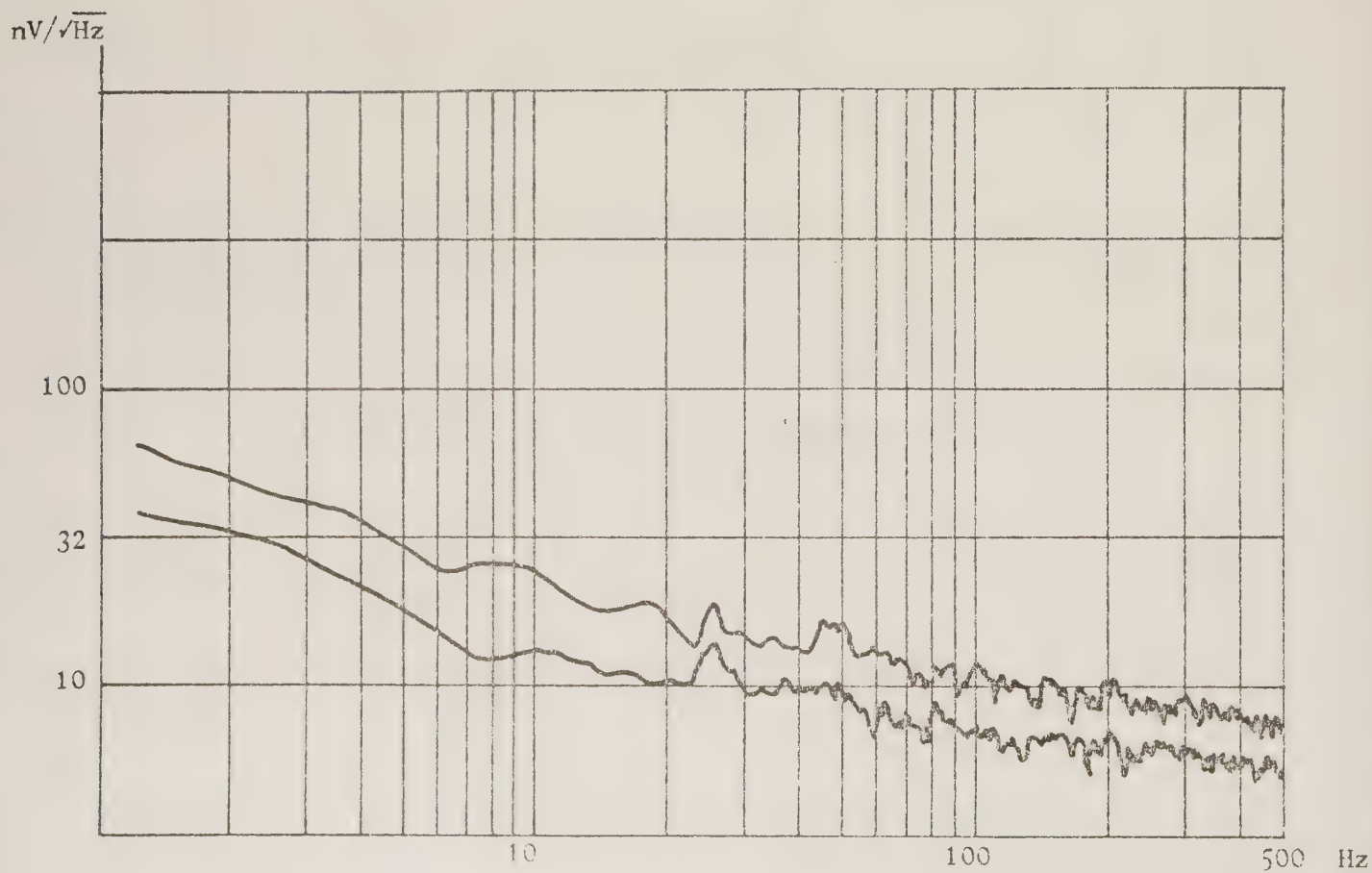
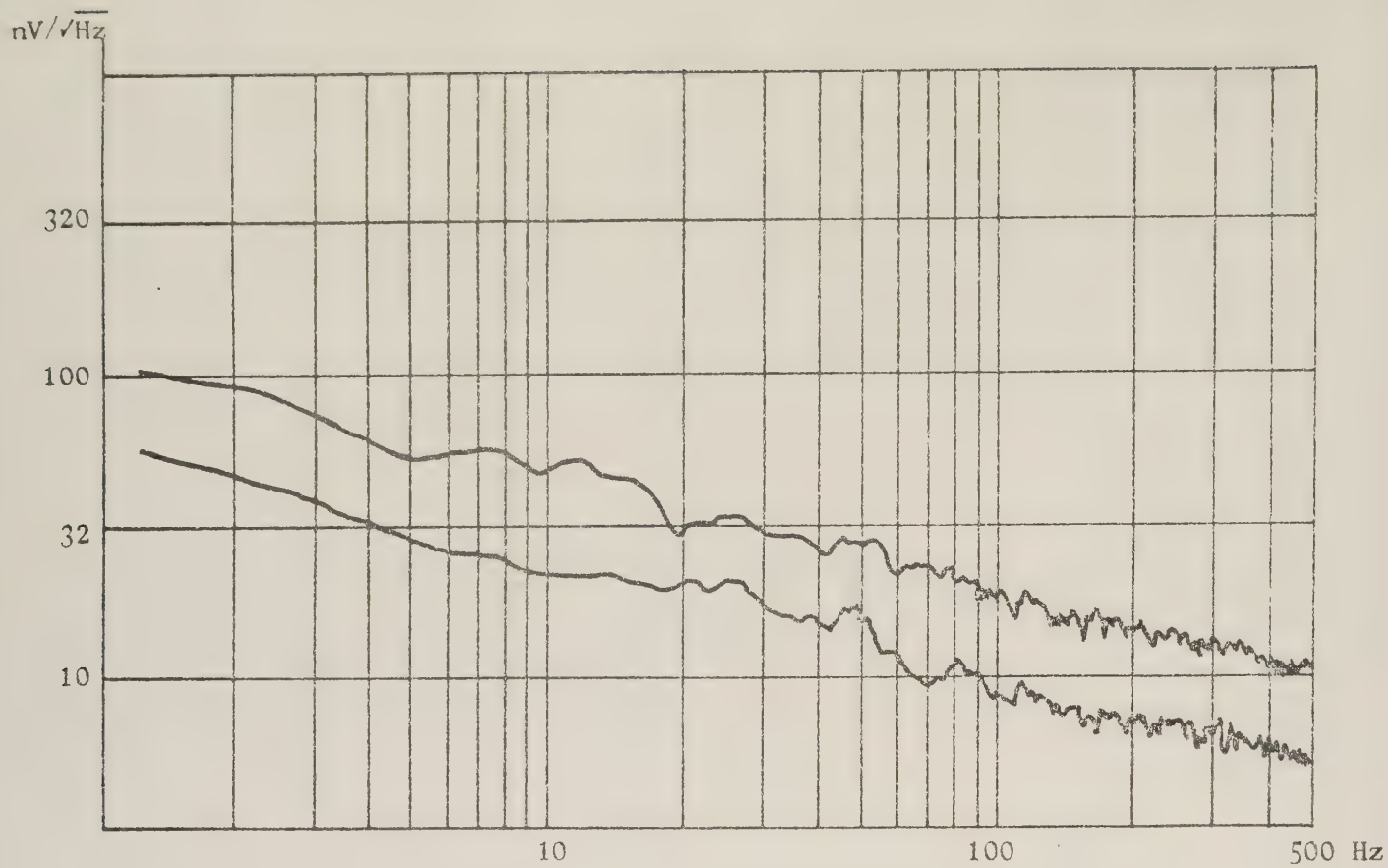
Le coefficient de qualité à vide déduit de la mesure est :

$$Q_0 = \frac{5 \cdot 10^6}{0,1} \times \frac{2,3+2}{2,3} = 93 \cdot 10^6$$

$R_1 (\Omega)$



Paramètre R_1 en fonction de la température
pour un quartz 5 MHz Partiel 5



2 - Bruit des résonateurs

Ci-contre : diverses conditions de mesure du bruit du banc
(première ou deuxième méthode)

Le niveau indiqué est celui ramené en sortie du dernier mélange.

* En haut : fréquence de travail : 10 MHz

Source : Synthétiseur Fluke à synthèse directe

Niveau d'entrée sur les deux voies du mélangeur

- courbe supérieure : 250 mV eff
- courbe inférieure : 200 mV eff

* En bas : fréquence de travail : 5 MHz

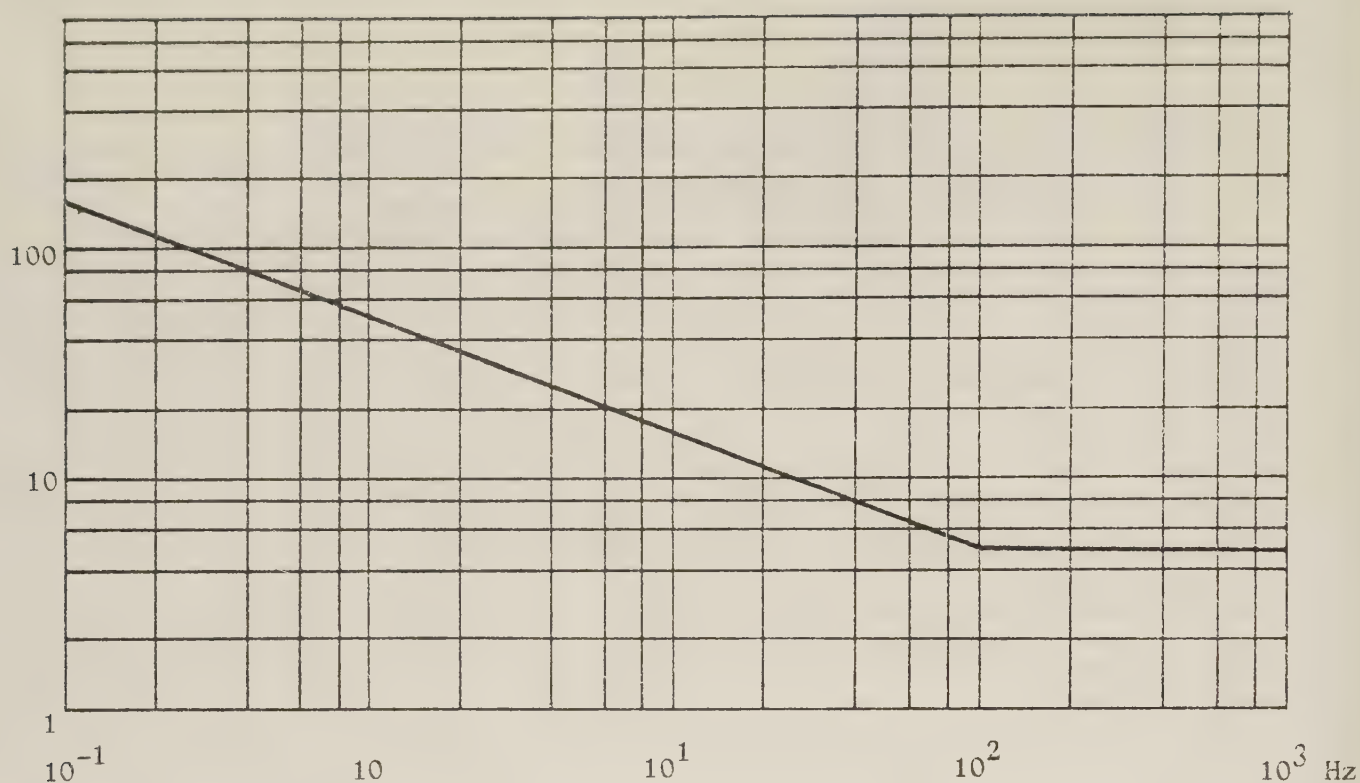
Source : Synthétiseur Fluke

Niveau d'entrée sur les deux voies du mélangeur

- courbe supérieure : 250 mV eff
- courbe inférieure : 200 mV eff

On remarque que dans ce second cas, le bruit du banc est d'une part plus faible qu'à 10 MHz, et que d'autre part il dépend moins du niveau d'entrée du mélangeur.

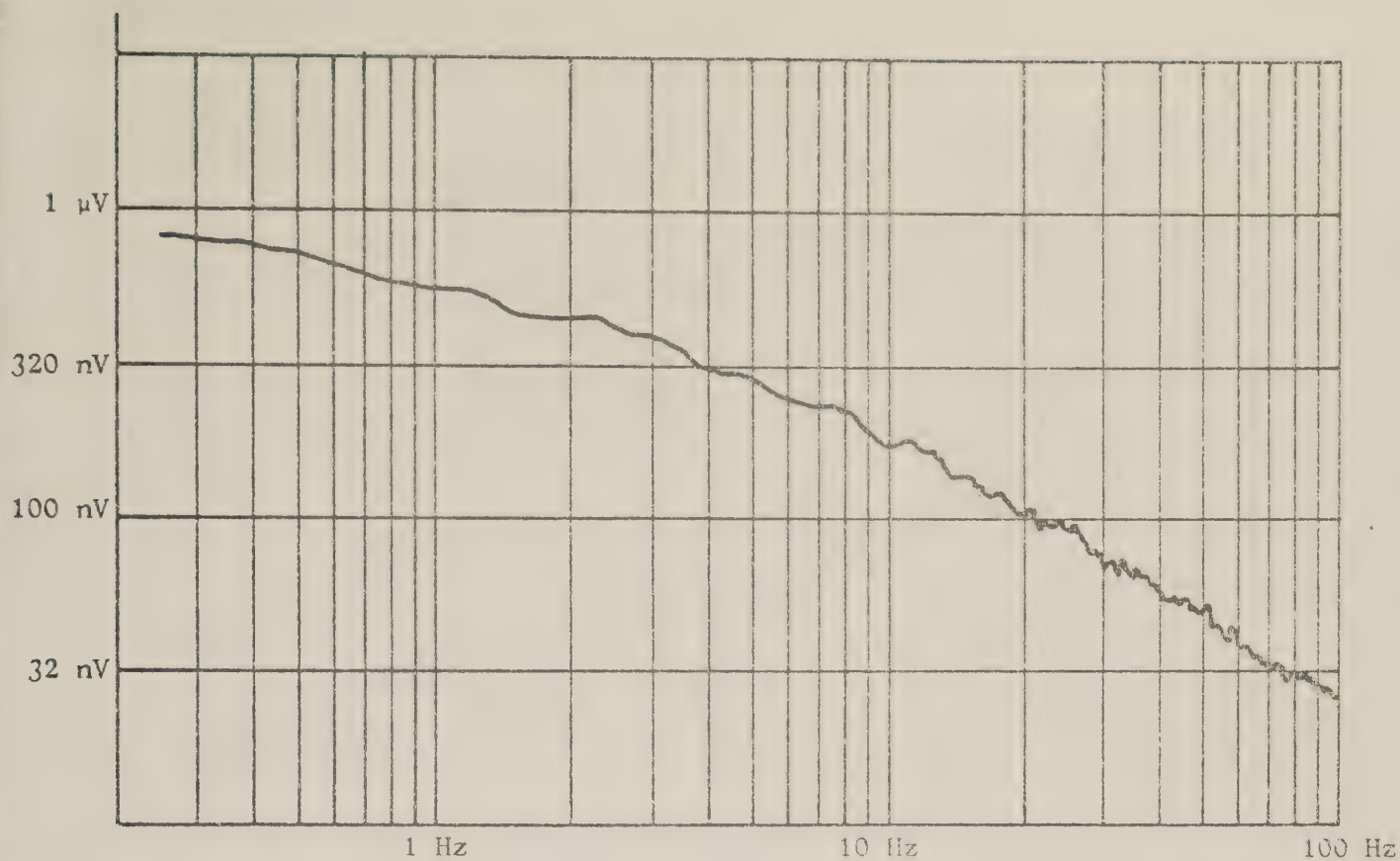
$\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$



Fréquence de travail 5 MHz

Bruit du banc ramené à la sortie du dernier mélange
(1ère ou 2e méthode)

Niveau d'excitation commun aux deux voies : 200 mVeff



Paire de quartz 8 MHz mesurée par la première méthode

Sensibilité du mélangeur : $8 \cdot 10^{-4}$ V/d°

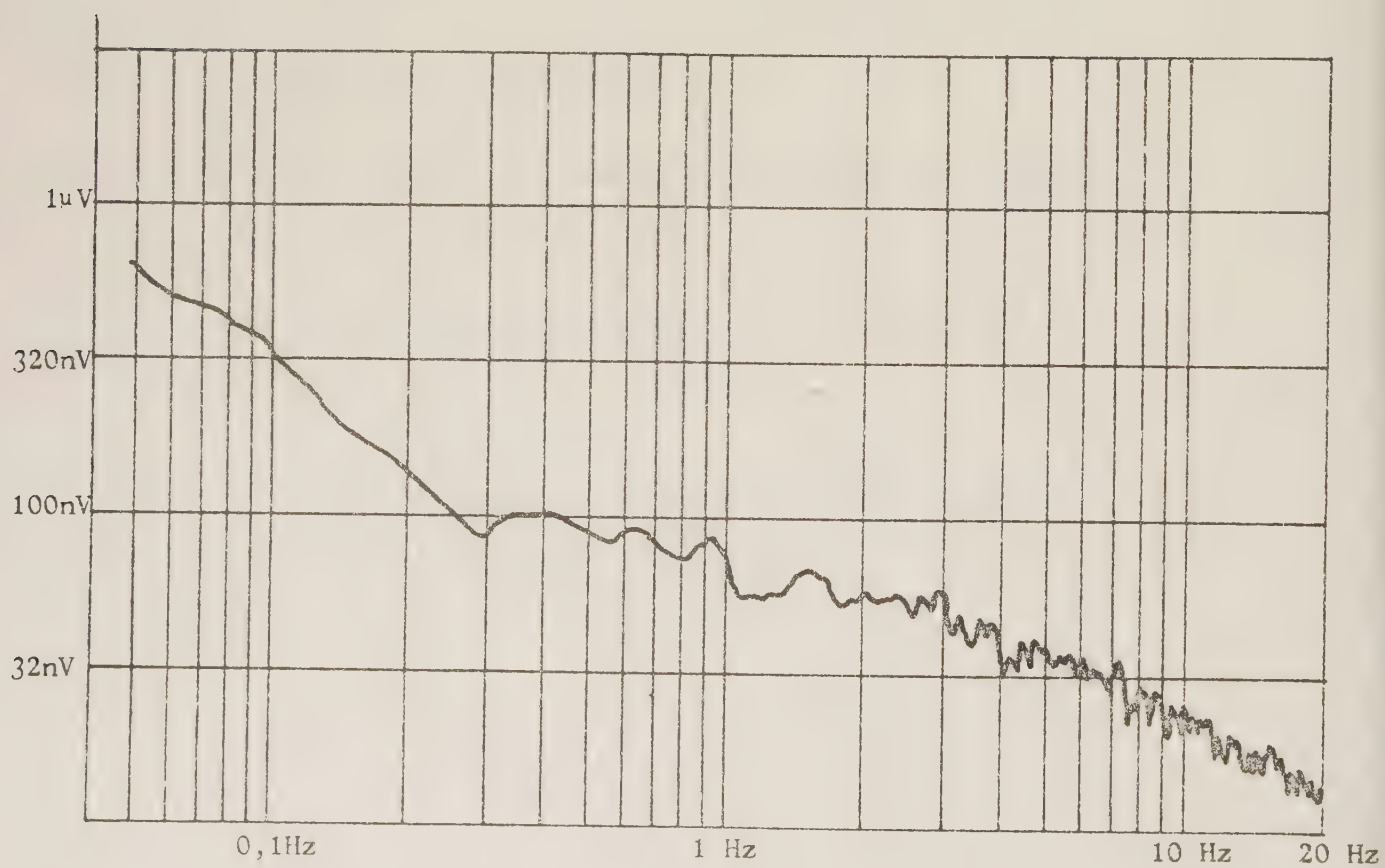
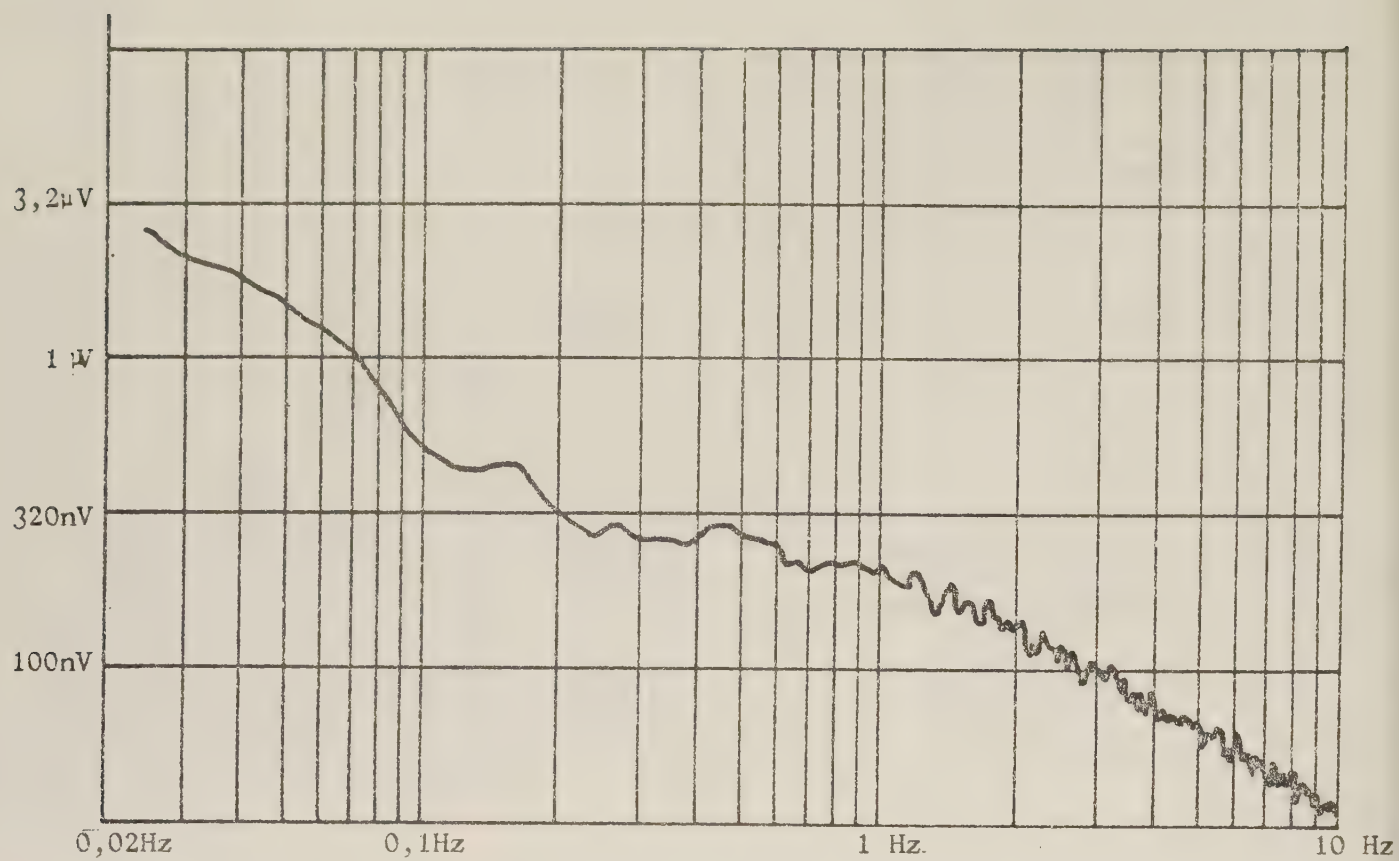
Demi-bande passante : 9 Hz

d'où l'on déduit :

$$S_y(1\text{Hz}) = 2 \cdot 10^{-22}$$

Limite du banc dans cette configuration :

$$S_y(1\text{Hz}) = 1,5 \cdot 10^{-24}$$



Première méthode

Spectre fourni par l'analyseur pour une paire de quartz 5 MHz partiel 5.
En ordonnées les tensions efficaces $\sqrt{\text{Hz}}$ en sortie du mélangeur.

La demi bande passante est à environ 1,5 Hz

Sensibilité du mélangeur pour cette mesure : $8 \cdot 10^{-4} \text{ V/d}^\circ$

d'où :

$$S_y(1\text{Hz}) = 2 \cdot 10^{-24}$$

On distingue bien sur cette courbe le palier flicker (entre 0,1 et 1 Hz) et le palier en $1/f^2$ (en-dessous de 0,1 Hz). Au-delà de 1 Hz apparaît le phénomène de filtrage dû au quartz.

Limite du banc dans ces conditions : $S_y(1\text{Hz}) = 10^{-25}$

Spectre obtenu pour la même paire de quartz que dans l'expérience ci-dessus.

Ici les coefficients de qualité sont aussi équilibrés mais délibérément affaiblis puisque la demi bande passante est devenue environ 3 Hz.

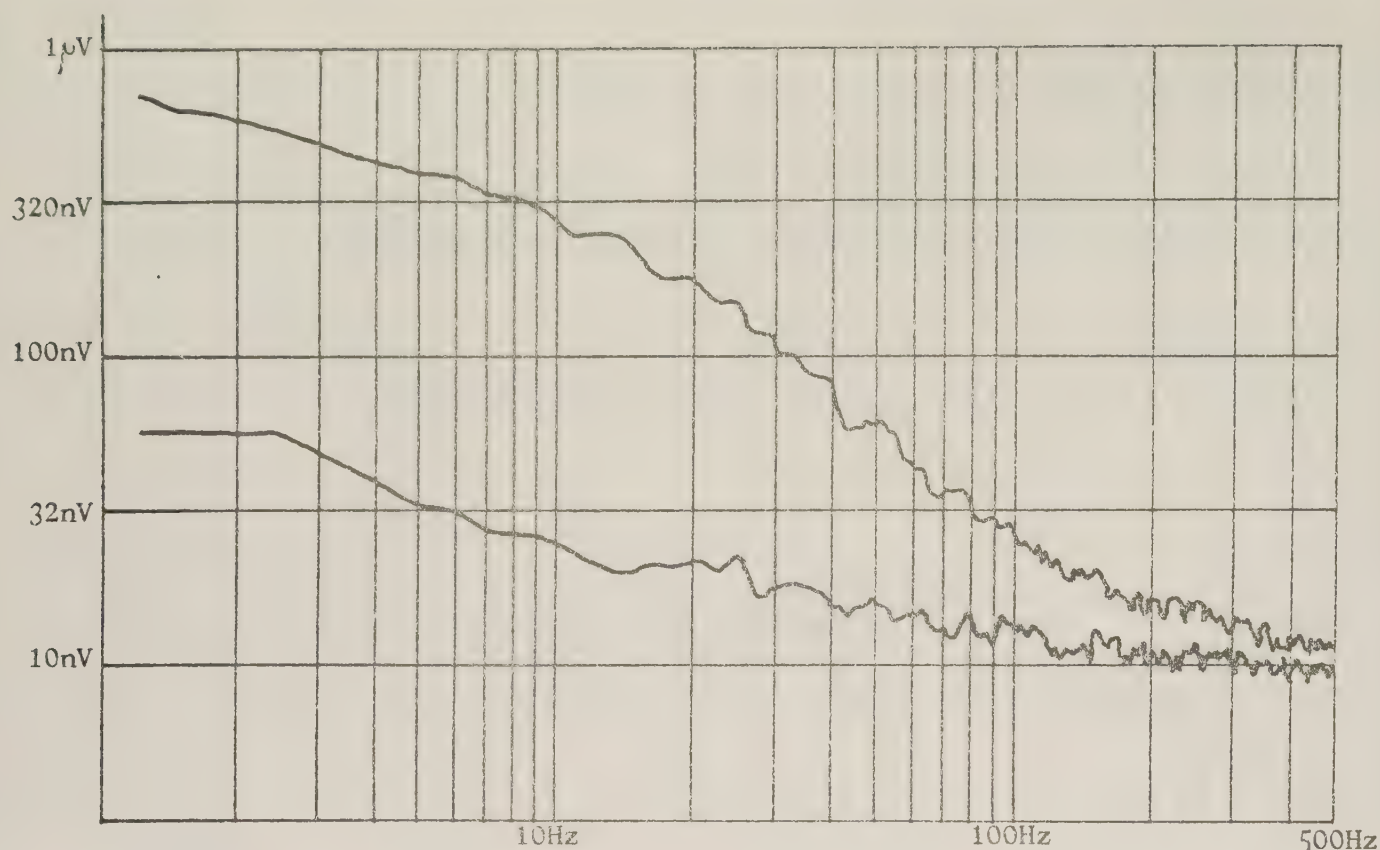
On trouve :

$$S_y(1\text{Hz}) = 1,5 \cdot 10^{-24}$$

A noter que l'on retrouve les différents paliers ($1/f^2$ et flicker).

On tombe ici dans les limites du banc puisque à 1 Hz le palier du banc est

$$S_y(1\text{Hz}) = 8 \cdot 10^{-25}$$



Mesure d'un seul quartz de qualité médiocre (3e méthode)

Source : Synthétiseur à synthèse directe

Courbe supérieure : bruit du quartz

Courbe inférieure : bruit du banc

Les deux courbes se rejoignent naturellement aux fréquences élevées

Fréquence de travail : 4,09 MHz

Demi-bande passante : 20 Hz

Sensibilité du mélangeur : $1,3 \cdot 10^{-3}$ V/d°

$$S_y(1\text{Hz}) = 4 \cdot 10^{-22}$$

$$\text{Limite du banc : } 10^{-24}$$

$$S_y(2\text{Hz}) = 1,5 \cdot 10^{-21}$$

$$\text{Limite du banc : } 5 \cdot 10^{-24}$$

Dans les deux cas, la source a une contribution en bruit comparable à celle du banc et donc nettement inférieure au bruit du quartz mesuré.

Application de la seconde méthode de mesure

Si l'on utilise des quartz dont la résistance dans l'hélium liquide est très faible (ordre de 5Ω), les niveaux d'excitation nécessaires pour une utilisation normale du premier mélangeur à diodes sont trop importants et provoquent des phénomènes d'"hystérésis".

On a donc recherché une paire de quartz conservant à cette température une résistance plus élevée. Les échantillons retenus ont les caractéristiques suivantes :

5 MHz	P5	$R_{\text{He}} = 10$	$Q_{\text{He}} = 6.10^6$
5 MHz+1 KHz	P5	$R_{\text{He}} = 13$	$Q_{\text{He}} = 5.8 \cdot 10^6$

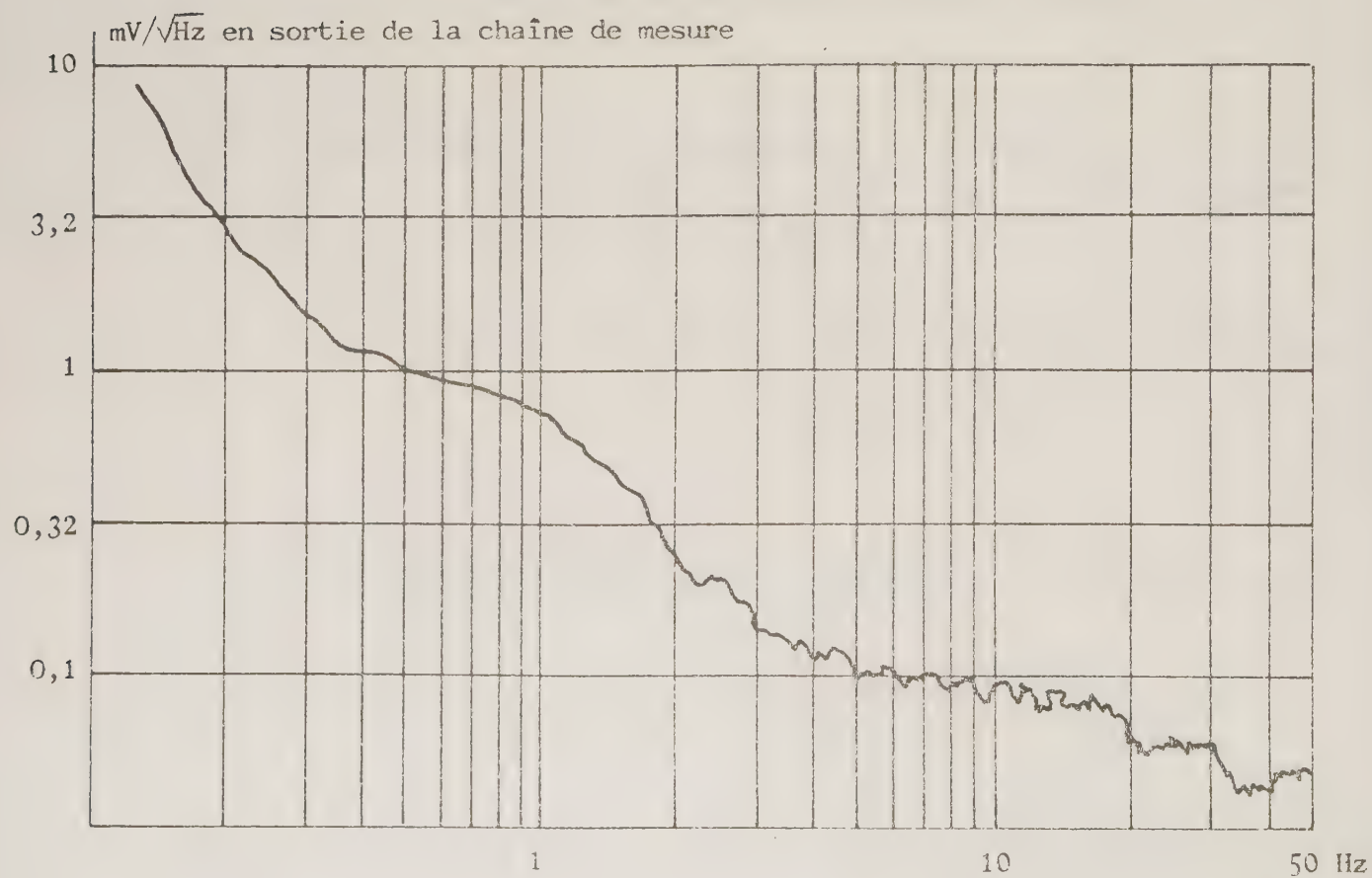
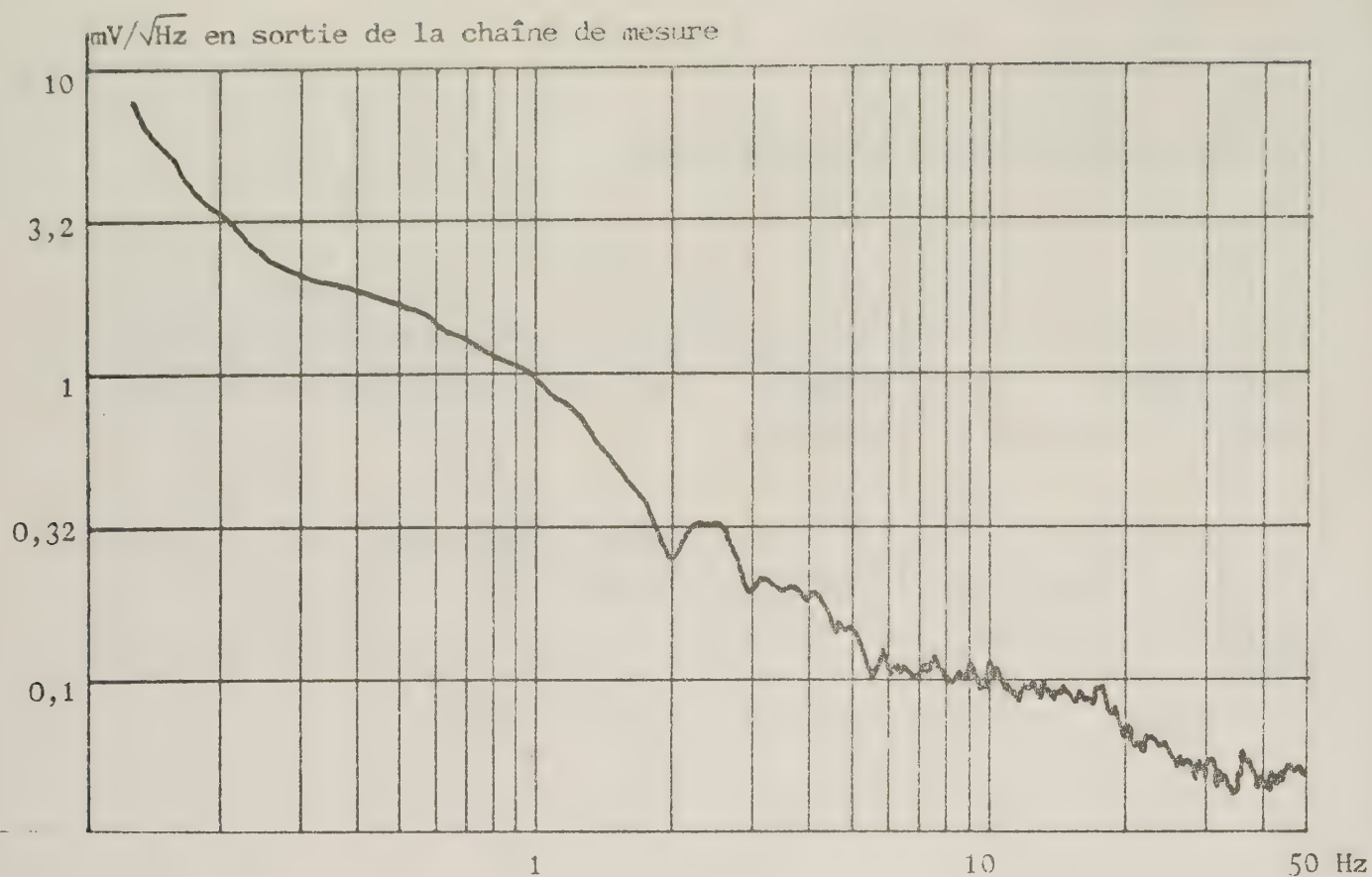
Ces quartz ont permis une mesure normale à température ambiante, ainsi qu'à 4,2°K et 1°K. La réjection du bruit de la source est meilleure que 60 dB.

Le synthétiseur dont la division fournit la fréquence de modulation est à synthèse directe à partir d'une source ultra-stable.

La mesure à température ambiante fournit, pour un quartz :

$$S_y(1\text{Hz}) = 1,3 \cdot 10^{-24}$$

Les courbes à 4,2°K et 1°K sont commentées page suivante.



Courbe supérieure : mesure à 4,2°K

La sensibilité est de $360 \text{ mV}/10^{-3} \text{ Hz}$, ce qui donne :

$$S_y(1\text{Hz}) = 1,5 \cdot 10^{-25} \quad \text{pour 1 quartz}$$

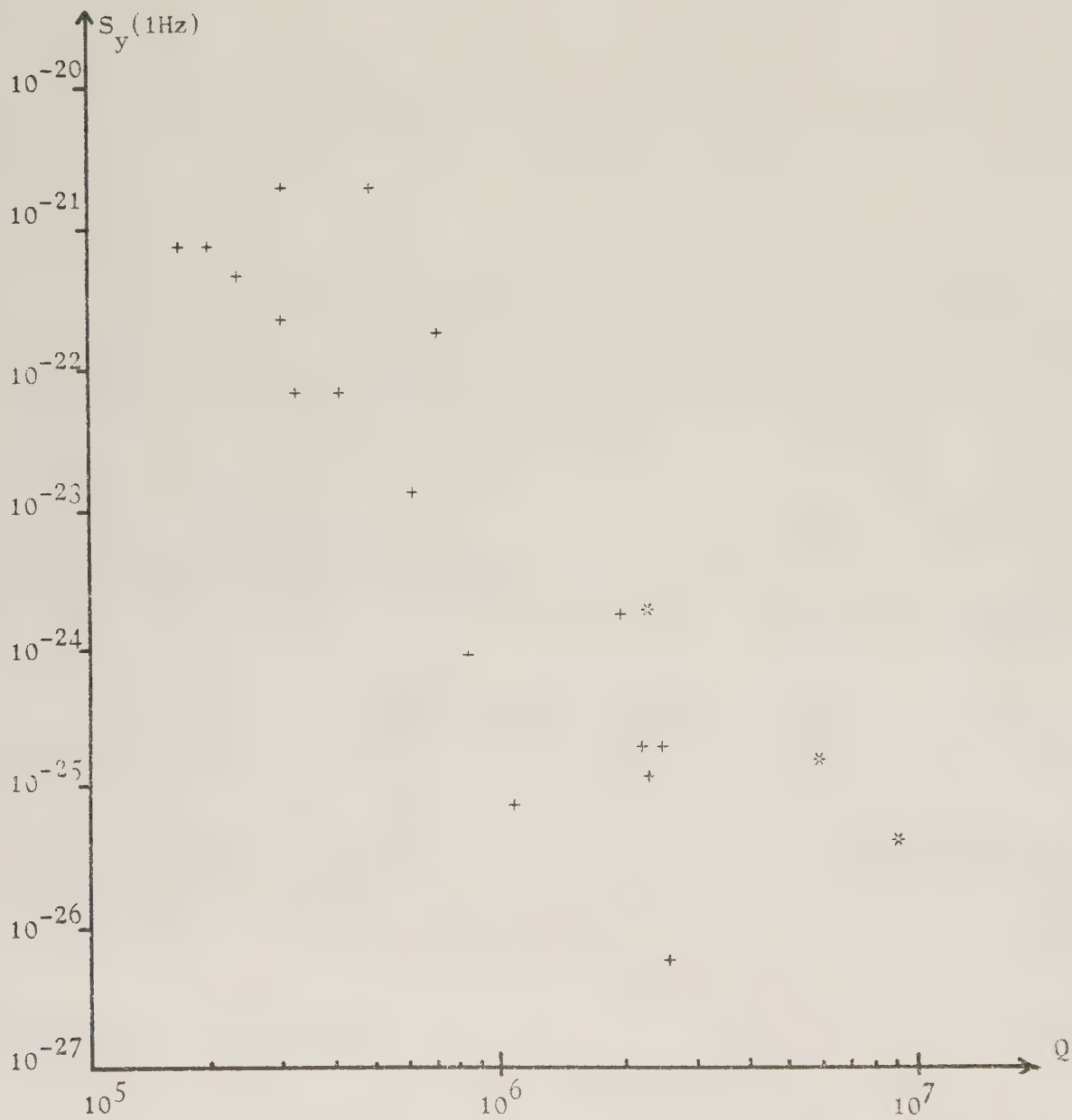
Le palier en $1/f^2$ aux très basses fréquences est probablement dû encore à un contrôle imparfait de la température des quartz, qui sont simplement immergés dans le bain d'hélium.

Sur la courbe inférieure est reporté le résultat de la mesure à 1°K.

Le maintien d'une forte composante aux très basses fréquences s'explique par la présence d'une dérive systématique. Le pompage au-dessus du bain provoque en effet une diminution de la température qui se stabilise vers 1°K tout en continuant à descendre très lentement. La sensibilité augmente en raison de l'augmentation du coefficient de qualité et passe à $480 \text{ mV}/10^{-3} \text{ Hz}$. Le niveau de bruit tend au contraire à diminuer encore et se rapprocher du bruit propre du banc.

$$S_y(1\text{Hz}) = 4 \cdot 10^{-26} \quad \text{pour 1 quartz}$$

Il est actuellement difficile de suivre l'évolution du niveau de bruit entre 4,2°K et 1°K car les turbulences provoquées par le pompage se retrouvent sur le spectre instantané mesuré. Il faudrait de plus conserver un équilibre continu des coefficients de qualité.



Ci-contre :

Ensemble des mesures de bruit effectuées.

Dans la zone $Q \approx 2 \cdot 10^6$, les quartz sont des 5 MHz Partiel 5 d'origines diverses.

Les points marqués d'une étoile sont les mesures des quartz suivis à 4,2°K et 1°K.

Dans la zone $Q \approx 3 \cdot 10^5$, les quartz sont à 10 MHz.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les mesures de bruit de fréquence des résonateurs effectuées dans le cadre de cette étude, ont permis de confirmer tout d'abord à la température ambiante l'hypothèse de l'existence d'une loi de dépendance en $1/Q^4$ entre le niveau du bruit en $1/f$ et le coefficient de qualité des résonateurs.

Cependant, différentes valeurs du coefficient de qualité ne pouvaient être obtenues qu'en utilisant des résonateurs différents, ce qui avait pour conséquence de modifier plusieurs paramètres à la fois.

Les mesures ont donc été étendues aux basses températures pour lesquelles une augmentation notable du coefficient de qualité peut être observée ; il devient ainsi possible de faire varier le paramètre Q d'un même résonateur.

Une nouvelle technique de mesure de bruit a été mise au point afin de pouvoir mesurer les fluctuations des résonateurs placés au fond d'un cryostat et portés à la température de l'hélium liquide, le problème principal provenant des variations inégales des fréquences moyennes des quartz.

Simultanément, devait être développée une méthode de mesure des paramètres motionnels du résonateur jusqu'à une température de 1°K .

Cette étude montre pour la première fois une diminution de la puissance de bruit en $1/f$ lorsque la température passe de 300°K à 1°K , et ce d'environ deux ordres de grandeur, ce qui confirme également la corrélation entre niveau de bruit et coefficient de qualité, mesurée cette fois-ci pour un même résonateur.

Nous avons enfin envisagé et testé une méthode de mesure directe du bruit propre de résonateurs de qualité médiocre afin d'étudier le niveau de bruit de scintillation à la température du pic d'interaction phonon-phonon, c'est-à-dire dans le cas où le résonateur présentera un coefficient de qualité minimal, qui devrait se traduire par une augmentation notable du bruit. Le problème principal est alors celui d'un contrôle suffisant de la température afin d'éviter toute dérive de fréquence qui empêcherait la mesure.

Les résultats montrent que l'abaissement de la température est des plus favorable pour la réalisation d'oscillateurs ultra-stables ; en effet le coefficient de qualité augmente, le bruit thermique diminue, le coefficient de température tend vers zéro, mais il est maintenant démontré que le bruit en $1/f$ diminue lui aussi, donc le palier de stabilité ultime d'un oscillateur dans le domaine temporel.

ANNEXE

L'INSTALLATION CRYOGENIQUE

L'élément principal est un vase Dewar de contenance 5 litres, communiquant avec l'extérieur par un long col étroit qui limite les apports de chaleur au niveau du bain.

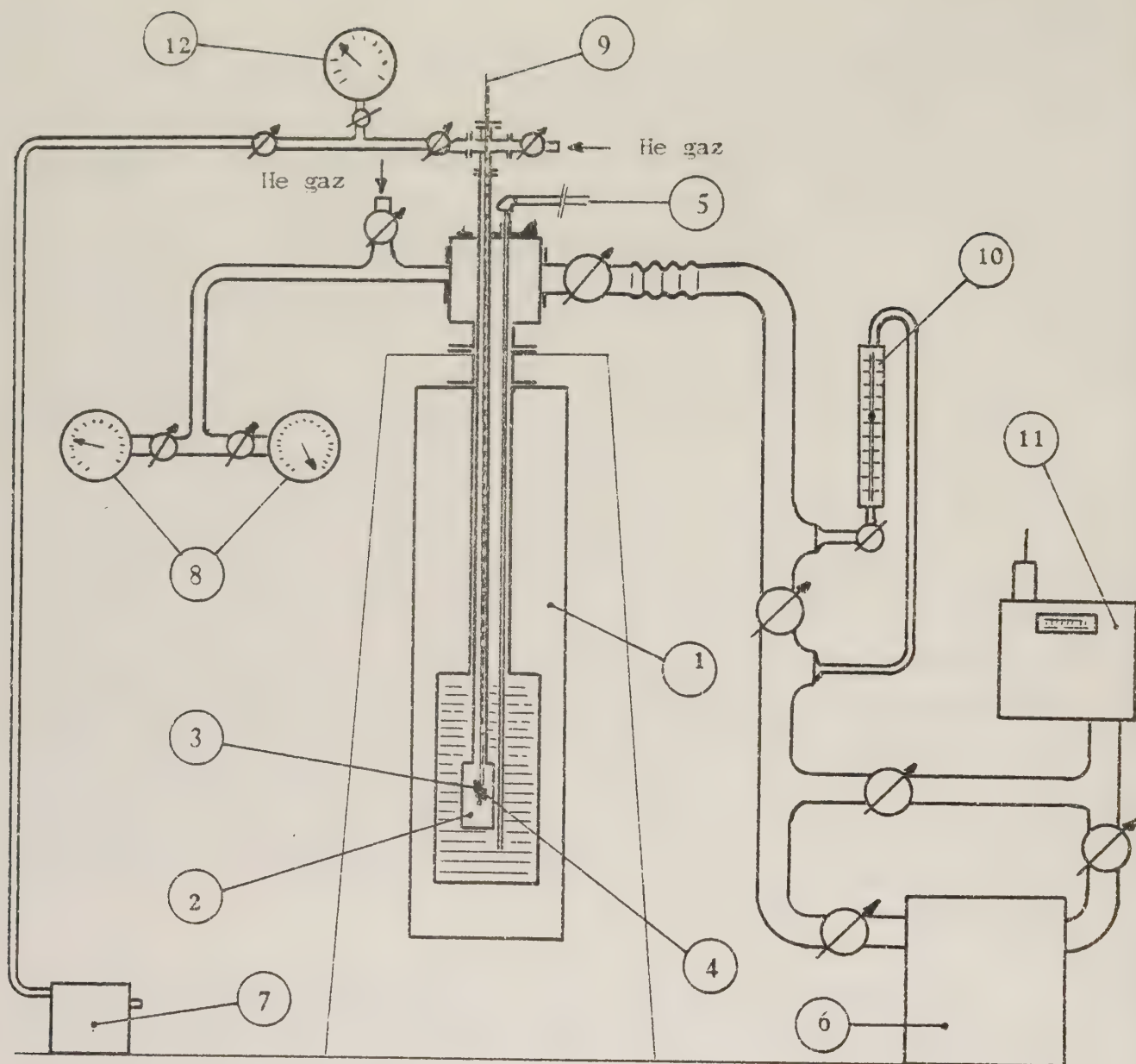
Deux solutions sont offertes pour l'immersion du ou des quartz :

- directement dans le bain d'hélium à l'extrémité de câbles micro-coaxiaux très fins permettant de limiter au maximum les apports de chaleur. Comme l'étanchéité doit être assurée au niveau de la tête de cryostat, le plus simple est d'inclure ces câbles dans un tube scellé autour duquel il est facile par un joint de réaliser cette étanchéité. On peut ainsi également faire passer les fils d'alimentation d'une sonde de contrôle de la température située au niveau des quartz.

- dans une enceinte fermée, isolée du bain d'hélium (cas de la figure). Cette enceinte possède son propre circuit de pompage, le contrôle du vide permettant de régler les échanges caloriques avec le bain. Une arrivée d'hélium gazeux doit être prévue également pour éviter l'introduction de vapeur d'eau. Les échantillons de quartz sont disposés dans un bloc métallique que l'on peut envisager de chauffer pour réaliser un contrôle de température par un asservissement obtenu grâce à une sonde placée elle aussi dans le bloc.

Le transfert :

L'hélium liquide contenu dans les vases de transport est amené dans le cryostat par une canne souple, elle-même constituée par une enceinte sous vide entourant le tube dans lequel passe le liquide. Le transfert se fait par une augmentation de pression au-dessus du liquide contenu dans la bouteille.



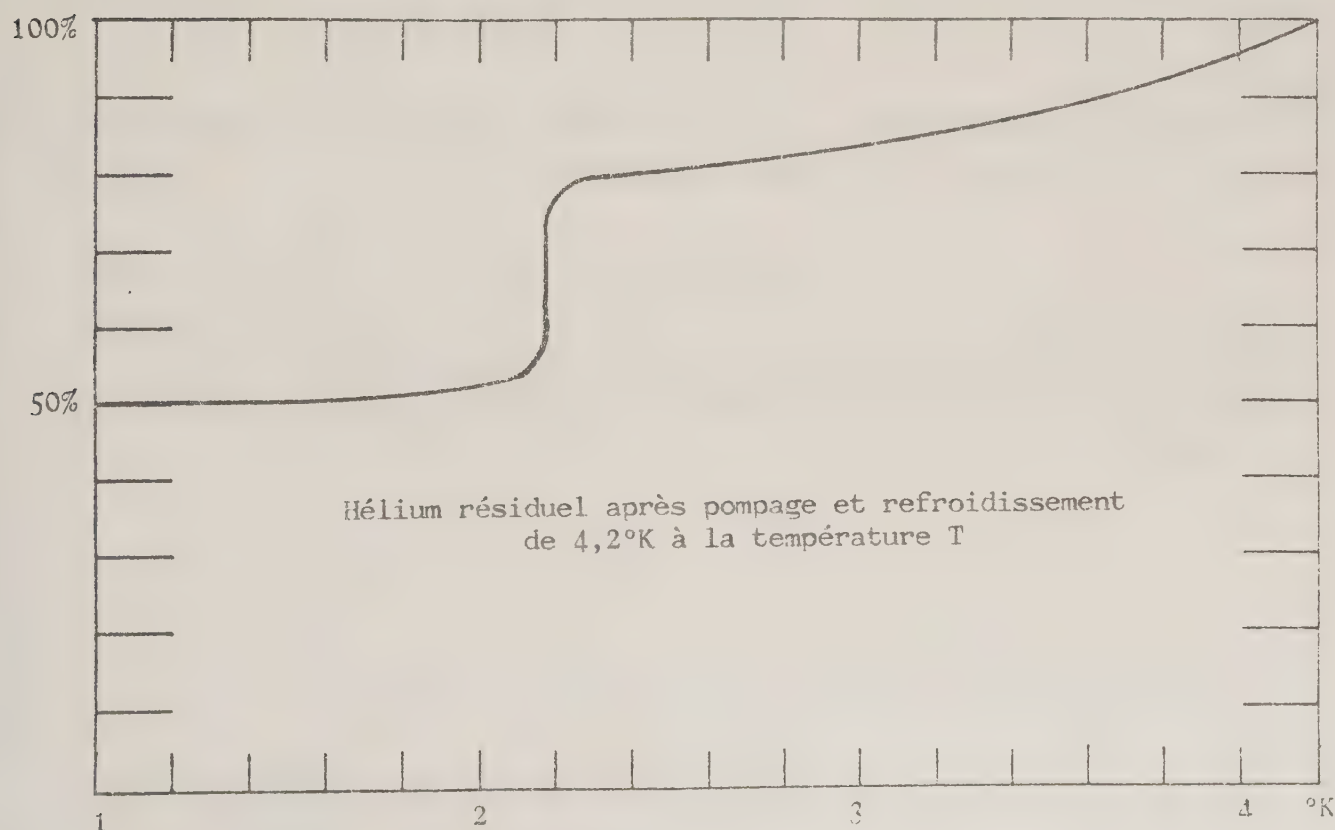
- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| 1 Dewar | 7 Pompe à vide chambre |
| 2 Enceinte | 8 Jauge de pression dewar |
| 3 Echantillon quartz | 9 Câbles micro-coaxiaux |
| 4 Sonde de température | 10 Débitmètre |
| 5 Canne de transfert hélium liquide | 11 Compteur |
| 6 Pompe à vide dewar | 12 Jauge de pression enceinte |

Avant le transfert et toujours pour éviter la présence de vapeur d'eau dans les zones de basses températures, un remplissage à l'hélium gazeux est prévu par une entrée spéciale.

Les forts débits gazeux prenant naissance lors du transfert doivent pouvoir s'écouler dans les tuyaux d'évacuation qui permettent en plus le réchauffement du gaz avant l'arrivée au compteur. Celui-ci permet de chiffrer les volumes de gaz évaporé. Un débitmètre est prévu pour l'évaluation des faibles débits (par exemple en cas d'évaporation au repos).

Le pompage en surface du bain

Cette technique permet d'obtenir des températures du bain inférieures à 4°K. Les températures que l'on peut espérer obtenir dépendent principalement du débit de pompage disponible. Cela dépend de la courbe donnant l'évaporation en fonction de la température du bain, et reproduite ici.



On voit en particulier que pour dépasser la température de $2,2^{\circ}\text{K}$, il faut pouvoir éliminer rapidement une forte quantité de gaz. Une seule pompe de débit $30 \text{ m}^3/\text{h}$ s'est ainsi révélée insuffisante, mais la disposition en parallèle de deux pompes assurant un débit total de $62 \text{ m}^3/\text{h}$ nous permet actuellement de descendre à 1°K .

Mesure de la température

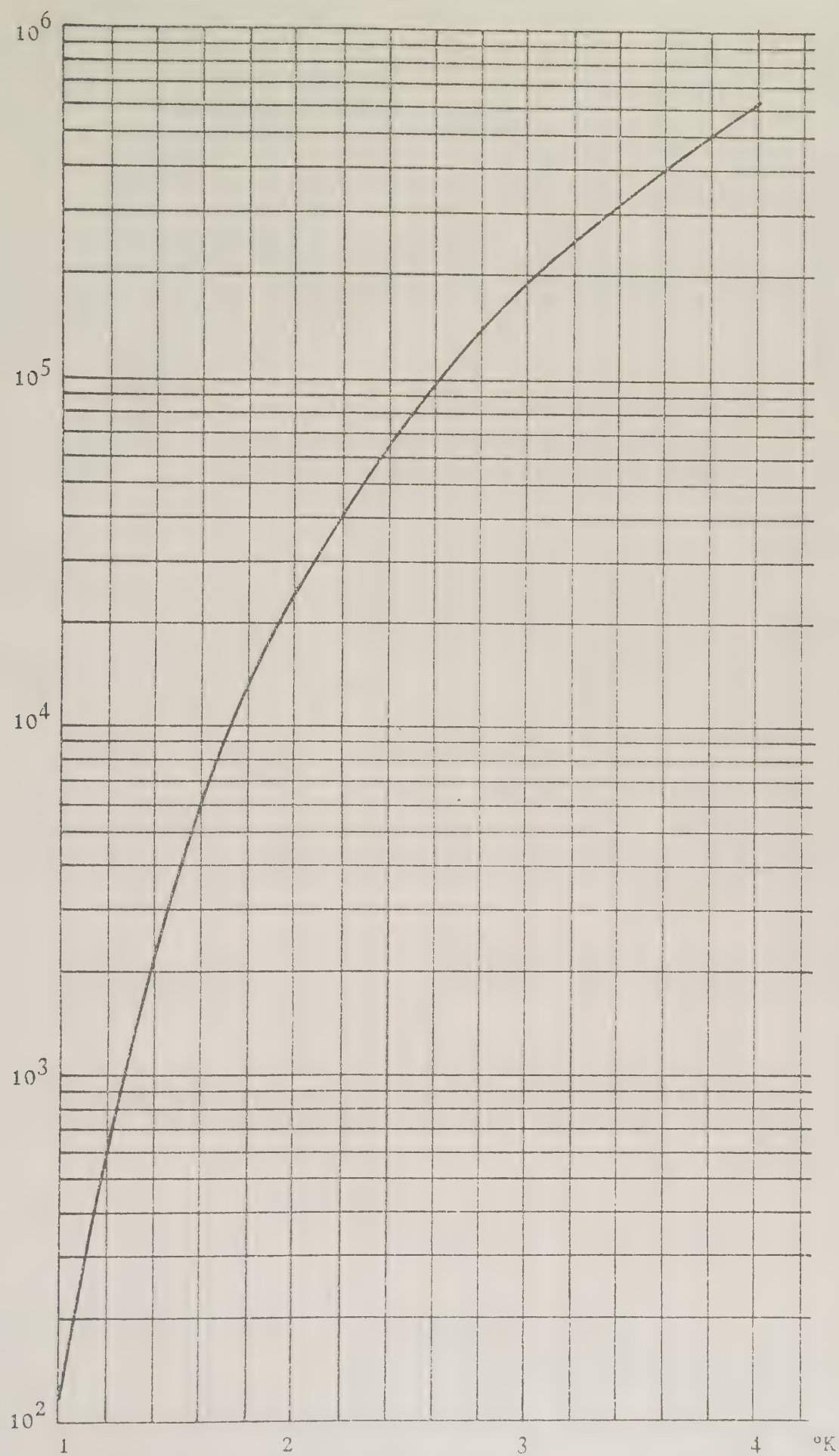
La sonde calibrée est alimentée par une source à courant constant adaptable à la valeur de la résistance à mesurer. De l'évaluation rapide de la valeur de la résistance se déduit simplement la température de la sonde.

Un second moyen de contrôle est par ailleurs disponible en particulier en-dessous de 4°K . La pression au-dessus du bain est reliée à la température de celui-ci. Cette pression est contrôlée lors du pompage par deux manomètres complémentaires ($P_{\text{atmosphérique}} + 3 \text{ mbar}$, $3 \text{ mbar} + 0,1 \text{ mbar}$). Un abaque reproduit ici permet de déduire la température d'après la pression mesurée.

Dans la zone de températures où nos deux moyens de mesure sont applicables, les valeurs indiquées se recoupent convenablement.

Précisons pour conclure cette description que seule a été utilisée en pratique la technique d'immersion directe dans le bain des quartz. La seconde méthode se justifie par la mise en oeuvre d'une régulation de température qui n'a pas été étudiée dans le cadre de ce travail mais dont l'intérêt est évident.

Tension de vapeur en μm de HG à 0°C



B I B L I O G R A P H I E

- [1] Fred L. Walls & Arthur E. Wainwright
"Measurement of the short-term stability of quartz crystal résonators and the implications for crystal oscillator design and applications",
IEEE Trans. Inst. Meas., IM 24, n° 1, mars 1975.
- [2] J.J. Gagnepain,
"Fundamental noise studies of quartz crystal resonators",
30th Annual Symposium on frequency control, Ft Monmouth, N.J.,
juin 1976.
- [3] J. Haag,
"Les mouvements vibratoires", PUF Paris 1952.
- [4] P. Kartaschoff,
"Frequency and Time", Academic Press, 1978.
- [5] A.G. Smagin,
"A 1MHz quartz resonator with a Q factor of $4.2 \cdot 10^9$ at a temperature of 2°K",
All-Union Engineering Correspondence Institute, Moscow.
Translated from Priborg i Tekhnika Eksperimenta, n° 6, 143-145, nov.-déc. 1974.
- [6] D.G. Meyer,
"A test set for the accurate measurement of phase noise on high-quality signal sources".
- [7] A. Blanchard,
"Technique des boucles d'asservissement de phase",
Cours Ecole Supérieure d'Electricité, 1975.
- [8] G. Sauvage,
Thèse 3e cycle, Paris VI, 1974.
- [9] C. Pegeot & J.J. Gagnepain,
"Quartz crystal parameters measurement system",
IEEE Trans. Inst. Meas., vol. IM26, n° 4, déc. 1977.

